Devoir surveillé 1 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la précision, concision et clarté de la rédaction.

Exercice 1. Dans cet exercice, pour n entier strictement positif et p un entier naturel, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

1. À quoi est égale la somme $S_0(n)$?
2. Donner et redémontrer les formules pour $S_1(n)$ et $S_2(n)$.
3. À l'aide de la formule du binôme, développer $(n+1)^{p+1} - n^{p+1}$.
4. Exprimer $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right)$ en fonction des $S_i(n)$ pour i compris entre 0 et p.
5. En déduire une expression de $(n+1)^{p+1}$ en fonction des $S_i(n)$ pour i compris entre 0 et p.
6. Déterminer une formule pour $S_3(n)$, on l'écrira sous une forme factorisée.

Exercice 2. Soit n un entier strictement positif. On cherche à calculer la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k k}{4k^2 - 1}.$$

1. Montrer que pour tout réel x différent de $\frac{-1}{2}$ et de $\frac{1}{2}$, on a :

$$\frac{x}{4x^2 - 1} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{x + \frac{1}{2}} \right).$$

2. À l'aide d'un changement de variable que vous expliciterez, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k - \frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k + \frac{1}{2}}.$$

3. En exploitant les égalités précédentes, déterminer une formule simple pour S_n.

Exercice 3. Soit α et β deux réels positifs non nuls. On considère la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} Q_0 &= \alpha, \\ Q_1 &= \beta, \\ Q_n &= \frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}}, \quad \text{pour } n \geq 2. \end{cases}$$

1. Calculer Q_2, Q_3, Q_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P définie par :

$$P(n) : Q_{5n} = \alpha,\ Q_{5n+1} = \beta,\ Q_{5n+2} = \frac{1+\beta}{\alpha},\ Q_{5n+3} = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta},\ Q_{5n+4} = \frac{1+\alpha}{\beta}.$$

   est vraie.

Exercice 4. On définit les fonctions min et max de la manière suivante :

$$\begin{array}{llcll} \max & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & (x,y) & \longmapsto & x & \text{si } x \geq y \\ & & & y & \text{sinon} \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \min & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & (x,y) & \longmapsto & x & \text{si } x \leq y \\ & & & y & \text{sinon} \end{array}$$

1. Montrer que :
   (a)
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2},$$
   (b)
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2},$$
   (c)
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \max(-x,-y) = -\min(x,y),$$
   (d)
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \min(-x,-y) = -\max(x,y),$$
   (e)
   $$\forall x \in \mathbb{R}, x = \max(x,0) + \min(x,0).$$
2. Montrer que max et min sont surjectives.
3. Déterminer l'image réciproque de $\{1\}$ par min et max.
4. Soit E un ensemble, A et B des parties de E. Déterminer les ensembles C et D tels que :
   $$\forall x \in E, \min\left(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)\right) = \mathbf{1}_C(x),$$
   et
   $$\forall x \in E, \max\left(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)\right) = \mathbf{1}_D(x).$$

Exercice 5. Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que f est positive (notée $f \geq 0$) si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0.$$

On dit que f est négative (notée $f \leq 0$) si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0.$$

1. Montrer que f est négative si et seulement si $-f$ est positive.
2. Déterminer la ou les applications à la fois positives et négatives.

3. Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe f_1 positive et f_2 négative telles que :
$$f = f_1 + f_2,$$
on pourra s'intéresser à des résultats des exercices précédents ou suivants.

Exercice 6. On pourra utiliser le résultat suivant. Soit x_1 et x_2 les solutions de l'équation
$$ax^2 + bx + c = 0,$$
avec $a \neq 0$. Alors :
- si $\frac{c}{a} < 0$, le signe de x_1 et de x_2 sont différents,
- si $\frac{c}{a} \geq 0$, et que $\frac{-b}{a} \geq 0$, x_1 et x_2 sont positifs (strictement en cas d'inégalité stricte),
- si $\frac{c}{a} \geq 0$ et que $\frac{-b}{a} < 0$, x_1 et x_2 sont négatifs.

On étudie l'équation d'inconnue réelle x et d'un paramètre réel m suivante :
$$x + 3 = |x| + 2m(3 + 2x - x^2) \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation (E) dans le cas où le paramètre m est nul.
2. On suppose désormais $m \neq 0$. On cherche maintenant à déterminer le nombre de solutions réelles et **positives** de l'équation (E).
   (a) Déterminer une équation équivalente dans ce cas. On l'écrira sous la forme :
   $$ax^2 + bx + c = 0.$$
   (b) Déterminer les solutions possibles. On notera x_1 la solution sous la forme $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et x_2 la solution sous la forme $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. On ne se préoccupera pas dans cette question de la validité de ces formules.
   (c) Déterminer le domaine de définition de ces formules.
   (d) Déterminer suivant la valeur de m les cas où :
      i. x_1 et x_2 sont positifs,
      ii. x_1 et x_2 sont négatifs,
      iii. x_1 est positif et x_2 négatif,
      iv. x_1 est négatif et x_2 positif.
   (e) Résumer dans un tableau comme celui-ci les solutions réelles positives en fonction du paramètre m.

m	$m < 0$	$m = 0$	$0 < m < \frac{3}{8}$	$m = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{8} < m < \frac{1}{2}$	$m = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < m$