# Devoir surveillé 1 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

---

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la précision, concision et clarté de la rédaction.

---

**Exercice 1.** Dans cet exercice, pour $n$ entier strictement positif et $p$ un entier naturel, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

1. À quoi est égale la somme $S_0(n)$ ?
2. Donner et redémontrer les formules pour $S_1(n)$ et $S_2(n)$.
3. À l'aide de la formule du binôme, développer $(n+1)^{p+1} - n^{p+1}$.
4. Exprimer $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right)$ en fonction des $S_i(n)$ pour $i$ compris entre 0 et $p$.
5. En déduire une expression de $(n+1)^{p+1}$ en fonction des $S_i(n)$ pour $i$ compris entre 0 et $p$.
6. Déterminer une formule pour $S_3(n)$, on l'écrira sous une forme factorisée.

**Correction**

1. On a $S_0(n) = n$.
2. Cours.
3. D'après la formule du binôme, on a :

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} n^k - n^{p+1}.$$

Donc :

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} n^k.$$

4. On a, d'après la question 2 :

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} k^i.$$

En permutant les deux signes sommes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{k=0}^{n} \binom{p+1}{i} k^i.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{p+1}-k^{p+1}\right)=\sum_{i=0}^{p}\sum_{k=1}^{n}\binom{p+1}{i}k^i.$$

Par linéarité,

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{p+1}-k^{p+1}\right)=\sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i}\sum_{k=1}^{n}k^i.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{p+1}-k^{p+1}\right)=\sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i}S_i(n).$$

Or, la somme du membre gauche est une somme télescopique. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{p+1}-k^{p+1}\right)=(n+1)^{p+1}-1.$$

On en déduit que :

$$(n+1)^{p+1}=1+\sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i}S_i(n).$$

Pour $p=3$, on obtient :

$$(n+1)^4=1+n+4S_1(n)+6S_2(n)+4S_3(n).$$

D'où :

$$4S_3(n)=(n+1)^4-4S_1(n)-6S_2(n)-(n+1)$$

En remplaçant les valeurs de $S_1(n)$ et $S_2(n)$, on obtient :

$$4S_3(n)=(n+1)^4-2n(n+1)-n(n+1)(2n+1)-(n+1).$$

Par conséquent :

$$\begin{array}{rrcl}
 & 4S_3(n) & = & (n+1)\left((n+1)^3-2n-n(2n+1)-1\right) \\
\Leftrightarrow & 4S_3(n) & = & (n+1)\left((n+1)^3-n(2n+1)-(2n+1)\right) \\
\Leftrightarrow & 4S_3(n) & = & (n+1)\left((n+1)^3-(n+1)(2n+1)\right) \\
\Leftrightarrow & 4S_3(n) & = & (n+1)^2\left((n+1)^2-(2n+1)\right) \\
\Leftrightarrow & 4S_3(n) & = & (n+1)^2\left(n^2+2n+1-(2n+1)\right) \\
\Leftrightarrow & 4S_3(n) & = & (n+1)^2n^2 \\
\Leftrightarrow & S_3(n) & = & \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2.
\end{array}$$

**Exercice 2.** Soit $n$ un entier strictement positif. On cherche à calculer la somme suivante :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k k}{4k^2-1}.$$

1. Montrer que pour tout réel $x$ différent de $\frac{-1}{2}$ et de $\frac{1}{2}$, on a :

$$\frac{x}{4x^2-1}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right).$$

2. À l'aide d'un changement de variable que vous expliciterez, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+\frac{1}{2}}.$$

3. En exploitant les égalités précédentes, déterminer une formule simple pour $S_n$.

**Correction**

1. Soit $x$ un réel différent de $\frac{-1}{2}$ et de $\frac{1}{2}$. En réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{(x+\frac{1}{2})+(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}\right).$$

D'où :

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{2x}{x^2-\frac{1}{4}}\right)$$

Donc :

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right) = \frac{x}{4x^2-1}.$$

2. Posons $k' = k-1$. Comme $k$ est compris entre 1 et $n$, $k'$ sera compris entre 0 et $n-1$. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k-\frac{1}{2}} = \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k'+1}}{k'+1-\frac{1}{2}}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k-\frac{1}{2}} = \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k'+1}}{k'+\frac{1}{2}}.$$

3. Comme les entiers sont différents de $\frac{1}{2}$ et de $-\frac{1}{2}$, on en déduit que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{8}\left(\frac{1}{k-\frac{1}{2}} + \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right).$$

Donc,

$$8S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k-\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\frac{1}{2}}.$$

En appliquant le résultat de la question 2, on en déduit que :

$$8S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\frac{1}{2}}.$$

D'où :

$$8S_n = -2 - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+\frac{1}{2}}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+\frac{1}{2}}\right) + \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}.$$

Donc :

$$S_n = -\frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{8n+4}.$$

**Exercice 3.** Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels positifs non nuls. On considère la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} Q_0 &= \alpha, \\ Q_1 &= \beta, \\ Q_n &= \frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}}, \quad \text{pour } n \geq 2. \end{cases}$$

1. Calculer $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P$ définie par :

   $$P(n) : Q_{5n} = \alpha,\ Q_{5n+1} = \beta,\ Q_{5n+2} = \frac{1+\beta}{\alpha},\ Q_{5n+3} = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta},\ Q_{5n+4} = \frac{1+\alpha}{\beta}.$$

   est vraie.

**Correction**

1. On a :

   $$Q_2 = \frac{1+\beta}{\alpha},\ Q_3 = \frac{1+\frac{1+\beta}{\alpha}}{\beta} = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}.$$

   Et :

   $$Q_4 = \frac{1+\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}}{\frac{1+\beta}{\alpha}}.$$

   Donc :

   $$Q_4 = \frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{\beta(1+\beta)} = \frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{\beta(\beta+1)}$$

   D'où :

   $$Q_4 = \frac{1+\alpha}{\beta}.$$

2. La propriété $P(0)$ est vraie, d'après la question 1. On suppose que pour un certain entier $n \geq 0$, la propriété $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. Comme $P(n)$ est vraie, on en déduit que :

   $$Q_{5n+4} = \frac{1+\alpha}{\beta},\ Q_{5n+3} = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}.$$

   Donc :

   $$Q_{5(n+1)} = \frac{1+\frac{1+\alpha}{\beta}}{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}} = \frac{\frac{\beta+\alpha+1}{\beta}}{\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}} = \alpha.$$

   Pour $Q_{5(n+1)+1}$, on a :

   $$Q_{5(n+1)+1} = \frac{1+\alpha}{\frac{1+\alpha}{\beta}} = \beta.$$

   Ainsi, le calcul de $Q_{5(n+1)+2}$, $Q_{5(n+1)+3}$, $Q_{5(n+1)+2}$ se font de la même manière que ce de $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$, et on en déduit que :

   $$\begin{aligned} Q_{5(n+1)+2} &= Q_2 \\ Q_{5(n+1)+3} &= Q_3 \\ Q_{5(n+1)+4} &= Q_4. \end{aligned}$$

   Il en résulte que $P(n+1)$ est vraie.

   Par le principe de récurrence, on en conclut que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

**Exercice 4.** On définit les fonctions min et max de la manière suivante :

$$\begin{array}{llll} \max & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x \quad \text{si } x \geq y \\ & & & y \quad \text{sinon} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \min & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x \quad \text{si } x \leq y \\ & & & y \quad \text{sinon} \end{array}$$

1. Montrer que :
   (a)
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2},$$
   (b)
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2},$$
   (c)
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \max(-x,-y) = -\min(x,y),$$
   (d)
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \min(-x,-y) = -\max(x,y),$$
   (e)
   $$\forall x \in \mathbb{R}, x = \max(x,0) + \min(x,0).$$
2. Montrer que max et min sont surjectives.
3. Déterminer l'image réciproque de $\{1\}$ par min et max.
4. Soit $E$ un ensemble, $A$ et $B$ des parties de $E$. Déterminer les ensembles $C$ et $D$ tels que :
   $$\forall x \in E, \min\left(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)\right) = \mathbf{1}_C(x),$$
   et
   $$\forall x \in E, \max\left(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)\right) = \mathbf{1}_D(x).$$

**Correction**

1. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   — Cas 1 : $x \geq y$. On a donc :
   $$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(-y+x)}{2} = y = \min(x,y).$$
   — Cas 2 : $x < y$. On a alors :
   $$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(x-y)}{2} = x = \min(x,y).$$
   On en déduit que :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2},$$
   (b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

— Cas 1 : $x \geq y$. On a donc :

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+(-y+x)}{2} = x = \max(x,y).$$

— Cas 2 : $x < y$. On a alors :

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+(x-y)}{2} = y = \max(x,y).$$

On en déduit que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2},$$

(c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\max(-x,-y) = \frac{-x-y+|-x+y|}{2} = -\frac{x+y-|x-y|}{2} = -\min(x,y)$$

(d) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\min(-x,-y) = \frac{-x-y-|-x+y|}{2} = -\frac{x+y+|x-y|}{2} = -\max(x,y).$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$.
- — Cas 1 : $x \geq 0$. Dans ce cas, $\max(x,0) = x$ et $\min(x,0) = 0$. Donc : $x = \max(x,0) + \min(x,0)$.
- — Cas 2 : $x < 0$. Dans ce cas, $\max(x,0) = 0$ et $\min(x,0) = x$. Donc : $x = \max(x,0) + \min(x,0)$.

On en déduit que pour tout $x$ réel, $x = \max(x,0) + \min(x,0)$.

2. Montrons que min et max sont surjectifs. Soit $x$ un réel. On a :
   - — $\min(x, x+1) = x$
   - — $\max(x, x-1) = x$.

   On en conclut que ces deux fonctions sont surjectives.
3. Notons : $A = \{(x,1), x \geq 1\} \cup \{(1,x), x \geq 1\}$, et $B = \{(x,1), x \leq 1\} \cup \{(1,x), x \leq 1\}$. Montrons que :

   (a) $\min^{-1}(\{1\}) = A$

   (b) $\max^{-1}(\{1\}) = B$. En effet, soit $(x,y)$ un élément de $\min^{-1}(\{1\})$.
   - — Cas 1 : $x \leq y$. Dans ce cas, $\min(x,y) = x$. Comme $(x,y) \in \min^{-1}(\{1\})$, on en déduit que $\min(x,y) = 1$ et donc $x = 1$. Et donc, $(x,y) = (1,y)$ avec $y \geq 1$, qui est un élément de $A$.
   - — Cas 2 : $x > y$. Dans ce cas, $\min(x,y) = y$. Comme $(x,y) \in \min^{-1}(\{1\})$, on en déduit que $\min(x,y) = 1$ et donc $y = 1$. Et donc, $(x,y) = (x,1)$ avec $y \geq 1$, qui est un élément de $A$.

   Réciproquement, soit $(x,y)$ un élément de $A$. Par construction de $A$, on a $\min(x,y) = 1$. Donc : $\min^{-1}(\{1\}) = A$.

   Soit $(x,y)$ un élément de $\max^{-1}(\{1\})$.
   - — Cas 1 : $x \leq y$. Dans ce cas, $\max(x,y) = y$. Comme $(x,y) \in \max^{-1}(\{1\})$, on en déduit que $\max(x,y) = 1$ et donc $y = 1$. Et donc, $(x,y) = (x,1)$ avec $y \geq 1$ qui est un élément de $B$.

— Cas 2 : $x > y$. Dans ce cas, $\max(x, y) = x$. Comme $(x, y) \in \max^{-1}(\{1\})$, on en déduit que $\max(x, y) = 1$ et donc $x = 1$. Et donc, $(x, y) = (1, y)$ avec $1 > y$ qui est un élément de $B$.

Réciproquement, soit $(x, y)$ un élément de $B$. Par construction de $B$, on a $\max(x, y) = 1$. Donc : $\max^{-1}(\{1\}) = B$.

4. Montrons que $C$ est unique sous réserve d'existence. Soit $C$ et $C'$ deux ensembles vérifiant :

$$\forall x \in E, \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \mathbf{1}_C(x),$$

$$\forall x \in E, \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \mathbf{1}_{C'}(x).$$

Donc :

$$\forall x \in E, \mathbf{1}_C(x) = \mathbf{1}_{C'}(x).$$

Ce qui signifie :

$$x \in C \Leftrightarrow x \in C'.$$

Par le principe de double inclusion, on en déduit que $C = C'$. De la même manière, on en déduit que $D$ est unique sous réserve d'existence.

Déterminons $C$.

— Cas 1 : $x \notin A$ ou $x \notin B$. On a alors : $\min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = 0$. Donc nécessairement, $\mathbf{1}_C(x) = 0$. Donc $C \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Or, $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}$, d'après les lois de Morgan. Et pour un ensemble $F$, $\overline{\overline{F}} = F$. On en déduit que $C \subset A \cap B$ nécessairement.

— Cas 2 : $x \in A \cap B$. Alors : $\min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = 1$. Donc, nécessairement, $\mathbf{1}_C(x) = 1$. Il en résulte que, $A \cap B \subset C$.

— Par synthèse des deux cas, $C = A \cap B$ est la seule possibilité. Or,
  — Pour $x \notin A$ ou $x \notin B$, $\min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = 0$ et $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 0$ ;
  — Pour $x \in A \cap B$, $\min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = 1$ et $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 1$.

  Donc :

$$\forall x \in E, \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \mathbf{1}_{A\cap B}(x).$$

  D'où $A \cap B$ est l'ensemble qui convient.

Déterminons $D$.

— Cas 1 : $x \notin A$ et $x \notin B$. On a alors : $\max(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = 0$. Donc nécessairement, $\mathbf{1}_D(x) = 0$. Donc $D \subset \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$. Or, $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}$, d'après les lois de Morgan. Et pour un ensemble $F$, $\overline{\overline{F}} = F$. On en déduit que $D \subset A \cup B$ nécessairement.

— Cas 2 : $x \in A \cup B$. Alors : $\max(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = 1$. Donc, nécessairement, $\mathbf{1}_D(x) = 1$. Il en résulte que, $A \cup B \subset D$.

— Par synthèse des deux cas, $D = A \cup B$ est la seule possibilité. Or,
  — Pour $x \notin A$ et $x \notin B$, $\max(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = 0$ et $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = 0$ ;
  — Pour $x \in A \cup B$, $\max(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = 1$ et $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = 1$.

  Donc :

$$\forall x \in E, \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)) = \mathbf{1}_{A\cup B}(x).$$

  D'où $A \cup B$ est l'ensemble qui convient.

**Exercice 5.** Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que $f$ est positive (notée $f \geq 0$) si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0.$$

On dit que $f$ est négative (notée $f \leq 0$) si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0.$$

1. Montrer que $f$ est négative si et seulement si $-f$ est positive.
2. Déterminer la ou les applications à la fois positives et négatives.
3. Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $f_1$ positive et $f_2$ négative telles que :
$$f = f_1 + f_2,$$
on pourra s'intéresser à des résultats des exercices précédents ou suivants.

**Correction**

1. Soit $f$ une application négative. Donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0.$$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -f(x) \geq 0$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}, -f(x) \geq 0$ est la définition d'une application positive. On en déduit que $-f$ est positive. Comme on a raisonné par équivalence, on en conclut que $f$ négative est équivalent à $-f$ est positive.
2. Soit $f$ une application à la fois positive et négative. Donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0, f(x) \leq 0.$$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$. Or, le seul élément à la fois inférieur et supérieur à 0 est 0 lui-même. Donc : $f(x) = 0$. On en déduit que $f$ est l'application nulle. Et il est clair que l'application nulle est positive et négative.
3. Posons : $\forall x \in R, f_1(x) = \max(f(x), 0)$ et $f_2(x) = \min(f(x), 0)$. D'après l'exercice, 4, on en déduit que $f_1 + f_2 = f$. Or, $f_1$ et $f_2$ sont respectivement positives et négatives. On a bien une décomposition d'une fonction $f$ en somme d'une fonction positive et d'une fonction négative.

**Exercice 6.** On pourra utiliser le résultat suivant. Soit $x_1$ et $x_2$ les solutions de l'équation
$$ax^2 + bx + c = 0,$$
avec $a \neq 0$. Alors :
- si $\frac{c}{a} < 0$, le signe de $x_1$ et de $x_2$ sont différents,
- si $\frac{c}{a} \geq 0$, et que $\frac{-b}{a} \geq 0$, $x_1$ et $x_2$ sont positifs (strictement en cas d'inégalité stricte),
- si $\frac{c}{a} \geq 0$ et que $\frac{-b}{a} < 0$, $x_1$ et $x_2$ sont négatifs.

On étudie l'équation d'inconnue réelle $x$ et d'un paramètre réel $m$ suivante :
$$x + 3 = |x| + 2m(3 + 2x - x^2) \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation (E) dans le cas où le paramètre $m$ est nul.
2. On suppose désormais $m \neq 0$. On cherche maintenant à déterminer le nombre de solutions réelles et **positives** de l'équation (E).
   (a) Déterminer une équation équivalente dans ce cas. On l'écrira sous la forme :
   $$ax^2 + bx + c = 0.$$
   (b) Déterminer les solutions possibles. On notera $x_1$ la solution sous la forme $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2$ la solution sous la forme $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. On ne se préoccupera pas dans cette question de la validité de ces formules.

(c) Déterminer le domaine de définition de ces formules.

(d) Déterminer suivant la valeur de $m$ les cas où :

i. $x_1$ et $x_2$ sont positifs,

ii. $x_1$ et $x_2$ sont négatifs,

iii. $x_1$ est positif et $x_2$ négatif,

iv. $x_1$ est négatif et $x_2$ positif.

(e) Résumer dans un tableau comme celui-ci les solutions réelles positives en fonction du paramètre $m$.

| $m$ | $m<0$ | $m=0$ | $0<m<\frac{3}{8}$ | $m=\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}<m<\frac{1}{2}$ | $m=\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}<m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Correction**

1. Cas 1 : $m=0$. Dans ce cas, l'équation est équivalente à :

$$x+3=|x|,$$

qui admet une unique solution $x=\frac{-3}{2}$.

2. cas 2 :$m \neq 0$.

(a) On cherche désormais les solutions réelles **positives**. Dans ce cas, l'équation est équivalente à :

$$0=-2mx^2+4mx+(6m-3). \tag{T1}$$

(b) Or, le discriminant de cette équation est : $\Delta=16m^2+8m(6m-3)=8m(8m-3)$. On en déduit que les solutions possibles (sans se préoccuper de la validité des formules) sont :

$$x_1=\frac{-4m-\sqrt{8m(8m-3)}}{-4m},\ x_2=\frac{-4m+\sqrt{8m(8m-3)}}{-4m}$$

d'où, en posant $R=\sqrt{\Delta}$ :

$$x_1=1+\frac{R}{4m},\ x_2=1-\frac{R}{4m}$$

(c) — Pour $0<m<\frac{3}{8}$, l'équation n'a pas de solution réelle, car $\Delta=8m(8m-3)$ est strictement négatif pour ces valeurs.

— Pour $m \geq \frac{3}{8}$, on en déduit que les solutions de l'équation (T1) sont :

$$x_1=1+\frac{R}{4m} \text{ et } x_2=1-\frac{R}{4m}.$$

$x_1$ étant positif car $m$ et $R$ le sont, il s'agit bien d'une solution de (E). Comme le produit des racines est égal à $-3+\frac{3}{2m}$, on en déduit que $x_2$ est strictement négatif si et seulement si $-3+\frac{3}{2m}<0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$ (car $m>0$). Donc :

— pour $\frac{3}{8} \leq m \leq \frac{1}{2}$, $x_1$ et $x_2$ sont les solutions positives de (E).

— pour $m>\frac{1}{2}$, $x_1$ est la solution positive de (E).

— Pour $m < 0$, de la même manière, les solutions sont :

$$x_1 = 1 + \frac{R}{4m} \text{ et } x_2 = 1 - \frac{R}{4m}.$$

Comme $m$ est strictement négatif, on en déduit que $x_2$ est positif. Le produit des racines étant égal à $-3+\frac{3}{2m}$, on en déduit que $x_2$ est strictement négatif si et seulement si $\frac{1}{2} < m$ ce qui est toujours faux car $m < 0$. On en déduit que dans ce cas, $x_2$ est la solutions positive de l'équation (E).

(d) Cas 2 : $x < 0$. Dans ce cas, l'équation (E) est équivalente à :

$$0 = -2mx^2 + (4m-2)x + (6m-3) \tag{T2}$$

Le discriminant de (T2) est :

$$\Delta = 64(m - \frac{1}{2})(m - \frac{1}{8}).$$

— Pour $\frac{1}{2} > m > \frac{1}{8}$, (T2) n'a pas de solution, et donc (E) n'a pas de solution réelle négative.
Dans la suite, on pose : $R' = \sqrt{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{1}{8})}$ et :

$$y_1 = 1 - \frac{1+4R'}{2m} \text{ et } y_2 = 1 - \frac{1-4R'}{2m}.$$

— Pour $m > \frac{1}{2}$, on a $y_2 = \frac{(2m-1)+4R'}{2m}$, qui est strictement positif, car $m > \frac{1}{2}$. Le produit $y_1 y_2$ étant égal à $-3+\frac{3}{2m}$, on en déduit que $y_1 < 0 \Leftrightarrow -3+\frac{3}{2m} < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$, ce qui est vrai. Donc $y_1$ est la seule solution négative de (E).

— Pour $0 < m \leq \frac{1}{8}$, le produit des racines $(3 + \frac{3}{2m})$ est strictement positif, et la somme est égale à $(2 - \frac{1}{m})$ qui est strictement négative. On en déduit que $y_1$ et $y_2$ sont strictement négatives. Elles sont donc les solutions réelles négatives de (E).

— Pour $m < 0$, on obtient :

$$-3 + \frac{3}{2m} > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2m} > 3 \Leftrightarrow \frac{1}{m} > 2$$

ce qui est faux, car $m < 0$. Donc le produit est toujours négatif. On en déduit que les deux racines sont de signe contraire. $y_1$ étant clairement positif, on en déduit que $y_2$ est la seule solution négative de (E).

Voici un tableau récapitulatif :

| $m$ | $]-\infty,0[$ | $0$ | $]0,\frac{1}{8}[$ | $\frac{1}{8}$ | $]\frac{1}{8},\frac{3}{8}[$ | $\frac{3}{8}$ | $]\frac{3}{8},\frac{1}{2}[$ | $\frac{1}{2}$ | $]\frac{1}{2},+\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x \geq 0$ | $x_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $1$ | $x_1, x_2$ | $0,\ 2$ | $x_1$ |
| $y < 0$ | $y_2$ | $-\frac{3}{2}$ | $y_1, y_2$ | $-3$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $y_1$ |