Devoir surveillé 2 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

- Durée : 2 heures et 30 minutes.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \;; \\ b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k a_k, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que pour $n \geq 1$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0.$$
2. En déduire que pour $n \geq 1$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = 0.$$
3. Montrer que pour tout n entier positif, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k b_k = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{k+j} a_j.$$
4. En écrivant les binomiaux sous leurs formes factorielles et en considérant un changement de variable que vous expliciterez, montrez que pour $0 \leq j < n$, on a :
$$\sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^k = 0.$$
5. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$:
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k b_k.$$

Exercice 2. Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Exprimer $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
   (b) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{8})$ est solution de l'équation $2X^2 - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
   (c) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$.
2. Calculer : $\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$.

Exercice 3. On s'intéresse à l'équation suivante pour $n \in \mathbb{N}$, et $\theta \in [0, 2\pi[$:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = 0. \tag{T}$$

1. Montrer que 0 n'est jamais solution de (T).
2. Déterminer les solutions dans le cas où $n = 0$.
3. On suppose désormais $\theta \neq 0$ et $n \neq 0$. Déterminer une expression pour la somme de l'équation (T).
4. En déduire les solutions de (T) pour $\theta \in [0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. On s'intéresse à la fonction ϕ suivante :

$$\begin{array}{cccc} \phi & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \frac{\overline{z}-i}{2z-1} \end{array}$$

1. Déterminer le domaine de définition de ϕ. Désormais, on se restreint à ce domaine.
2. Déterminer l'ensemble des solutions $z \in \mathbb{C}$ tel que :

   $$|\phi(z)| = 1.$$

   Indication : pensez à la forme canonique. En assimilant l'ensemble des complexes à un plan muni d'un repère, interpréter géométriquement cet ensemble.
3. On suppose que : $2 \leq |z| \leq 3$. Montrer que :

   $$\frac{1}{7} \leq |\phi(z)| \leq \frac{4}{3}.$$

Exercice 5.

1. Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que :

   $$\frac{1}{\cos(\theta)^2} = 1 + \tan(\theta)^2.$$

2. En déduire que pour x réel :

   $$\frac{1}{\cos(\arctan(x))^2} = 1 + x^2.$$

3. En déduire que pour x réel :

   $$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$