Devoir surveillé 2 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

— Durée : 2 heures et 30 minutes.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} b_0 = a_0 ; \\ b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k a_k, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que pour $n \geq 1$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0.$$
2. En déduire que pour $n \geq 1$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = 0.$$
3. Montrer que pour tout n entier positif, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k b_k = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{k+j} a_j.$$
4. En écrivant les binomiaux sous leurs formes factorielles et en considérant un changement de variable que vous expliciterez, montrez que pour $0 \leq j < n$, on a :
$$\sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^k = 0.$$
5. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$:
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k b_k.$$

Correction

1. Pour $n \geq 0$:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0.$$

2. On a d'après la question 1 :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$
Donc, en divisant par $n!$ qui est non nul, on obtient :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^k}{n!} = 0.$$
D'où :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = 0.$$
3. On a :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k b_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j a_j.$$
Donc :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k b_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} (-1)^{k+j} a_j.$$
On a $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq j \leq k$. En permutant les sommes, on obtient :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k b_k = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} (-1)^{k+j} a_j.$$
4. On a :
$$\sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} (-1)^k = \sum_{k=j}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{j!(k-j)!} (-1)^k.$$
Donc :
$$\sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} (-1)^k = \frac{n!}{j!} \sum_{k=j}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-j)!(n-k)!}.$$
Posons :$k' = k - j$. Alors : $n - k = n - j - k'$ et $0 \leq k' \leq n - j$. D'où :
$$\frac{n!}{j!} \sum_{k=j}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-j)!(n-k)!} = \frac{n!}{j!} \sum_{k'=0}^{n-j} \frac{(-1)^{k'+j}}{k'!(n-j-k')!}.$$
Par linéarité, on en déduit que :
$$\frac{n!}{j!} \sum_{k'=0}^{n-j} \frac{(-1)^{k'+j}}{k'!(n-j-k')!} = \frac{n!(-1)^j}{j!} \sum_{k'=0}^{n-j} \frac{(-1)^{k'}}{k'!(n-j-k')!}.$$
D'après la question 2, comme $n - j > 0$ car $j < n$, il en résulte que le membre droit de l'égalité est nul. On en conclut que :
$$\sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} (-1)^k = 0,$$
pour $j < n$.

5. Pour $n=0$, on a effectivement $a_0 = \binom{0}{0} b_0$. Soit $n \geq 1$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k b_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j a_j.$$

En permutant les deux sommes, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k b_k = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} (-1)^{j+k} a_j.$$

Par linéarité, on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k b_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} (-1)^k.$$

Pour $j < n$, d'après la question 4, on a :

$$\sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} (-1)^k = 0.$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k b_k = (-1)^n (-1)^n a_n = a_n.$$

Exercice 2. Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Exprimer $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
   (b) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{8})$ est solution de l'équation $2X^2 - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
   (c) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$.
2. Calculer : $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i,j)$.

Correction

1. (a) On a :

$$\cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1.$$

   (b) En remplaçant dans l'égalité précédente θ par $\frac{\pi}{8}$, on obtient :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos(\frac{\pi}{8})^2 - 1.$$

   D'où :

$$2\cos(\frac{\pi}{8})^2 - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

   Donc $\cos(\frac{\pi}{8})$ est solution de l'équation $2X^2 - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

   (c) Or les solutions de cette équation sont :

$$x_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ x_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

   Comme $\cos(\frac{\pi}{8})$ est positif, il en résulte que :

$$\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

2. Calcul de $S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$. On a :

$$S_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \max(i,j) + \sum_{1\leq j<i\leq n} \max(i,j).$$

Or :

$$\begin{array}{rcl} \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \max(i,j) & = & \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} j \\ & = & \sum_{j=1}^{n} j^2 \\ & = & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{array}$$

Et :

$$\begin{array}{rcl} \sum_{1\leq j<i\leq n} \max(i,j) & = & \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} i \\ & = & \sum_{i=2}^{n} i(i-1) \\ & = & \sum_{i=1}^{n} i(i-1) \\ & = & \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i \\ & = & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n(n+1)}{2} \\ & = & \frac{n(n+1)}{2}(\frac{2n+1}{3} - 1) \\ & = & \frac{n(n+1)}{2}(\frac{2n-2}{3}) \\ & = & \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \end{array}$$

Donc :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

D'où :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{6}\left(2n+1+2(n-1)\right).$$

D'où :

$$S_n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

Exercice 3. On s'intéresse à l'équation suivante pour $n \in \mathbb{N}$, et $\theta \in [0, 2\pi[$:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = 0. \tag{T}$$

1. Montrer que 0 n'est jamais solution de (T).
2. Déterminer les solutions dans le cas où $n = 0$.
3. On suppose désormais $\theta \neq 0$ et $n \neq 0$. Déterminer une expression pour la somme de l'équation (T).
4. En déduire les solutions de (T) pour $\theta \in [0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$.

Correction

1. Pour $\theta = 0$, on constate que (T) que l'on a :

$$n + 1 = 0,$$

avec $n \in \mathbb{N}$, ce qui est toujours faux. Donc 0 n'est jamais solution de l'équation (T).

2. Pour $n = 0$, l'équation est équivalente à :

$$1 = 0.$$

Ce qui est toujours faux. Donc pour $n = 0$, l'équation n'a pas de solution.

3. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \Re(e^{ik\theta})$$

Par additivité de la partie réelle, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)$$

Comme $\theta \in]0, 2\pi[$, il en vient que $e^{i\theta} \neq 1$ d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \Re\left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right).$$

En factorisant par l'angle moitié au numérateur et au dénominateur :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \Re\left(e^{\frac{in}{2}} \frac{e^{-\frac{i(n+1)\theta}{2}} - e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}}{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}\right).$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos(\frac{n\theta}{2}) \frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$$

Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, l'équation (T) est alors équivalente à :

$$\cos(\frac{n\theta}{2}) \frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} = 0.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\cos(\frac{n\theta}{2}) \sin(\frac{(n+1)\theta}{2}) = 0.$$

Autrement dit :

$$\cos(\frac{n\theta}{2}) = 0 \text{ ou } \sin(\frac{(n+1)\theta}{2}) = 0.$$

avec $\theta \in]0, 2\pi[$. D'où (T) est équivalent à :

$$\frac{n\theta}{2} = \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } \frac{(n+1)\pi}{2} = 0[\pi].$$

Donc, pour $\theta \in]0, 2\pi[$ et $n \neq 0$, (T) est équivalente à :

$$\theta = \frac{\pi}{n}\left[\frac{2\pi}{n}\right] \text{ ou } \theta = 0\left[\frac{2\pi}{(n+1)}\right].$$

Comme $\theta \in]0, 2\pi[$, il nous reste à trouver les entiers k tels que :

$$0 < \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} < 2\pi \text{ ou } 0 < \frac{2k\pi}{n+1} < 2\pi.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{-1}{2} < k < n - \frac{1}{2} \text{ ou } 0 < k < n + 1.$$

Les solutions de (T) sont donc :

$$S = \left\{\frac{(2k+1)\pi}{n}, 0 \leq k \leq n-1\right\} \cup \left\{\frac{2k\pi}{n+1}, 1 \leq k \leq n\right\} \tag{1}$$

Exercice 4. On s'intéresse à la fonction ϕ suivante :

$$\begin{array}{cccc} \phi & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \frac{\overline{z}-i}{2z-1} \end{array}$$

1. Déterminer le domaine de définition de ϕ. Désormais, on se restreint à ce domaine.
2. Déterminer l'ensemble des solutions $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$|\phi(z)| = 1.$$

   Indication : pensez à la forme canonique. En assimilant l'ensemble des complexes à un plan muni d'un repère, interpréter géométriquement cet ensemble.
3. On suppose que : $2 \leq |z| \leq 3$. Montrer que :

$$\frac{1}{7} \leq |\phi(z)| \leq \frac{4}{3}.$$

Correction

1. La fonction ϕ est définie si et seulement si son dénominateur est non nul. Autrement dit, pour

$$2z - 1 \neq 0.$$

   Donc, pour $z \neq \frac{1}{2}$. Le domaine de ϕ est donc $\mathbb{C}\backslash\{\frac{1}{2}\}$.
2. Résolvons l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$|\phi(z)| = 1. \tag{E}$$

   On suppose désormais, $z \neq \frac{1}{2}$. L'équation (E) est alors équivalente à :

$$|\overline{z} - i| = |2z - 1|.$$

   Par positivité des modules, l'équation est alors équivalente à :

$$\begin{array}{rlcl} & |\overline{z} - i|^2 & = & |2z - 1|^2 \\ \Leftrightarrow & (\overline{z} - i)(z + i) & = & (2z - 1)(2\overline{z} - 1) \\ \Leftrightarrow & |z|^2 - iz + i\overline{z} + 1 & = & 4|z|^2 - 2z - 2\overline{z} + 1 \\ \Leftrightarrow & -3|z|^2 - iz + i\overline{z} + 2z + 2\overline{z} & = & 0 \end{array}$$

   En posant $z = a + ib$ avec a et b réels, $z \neq \frac{1}{2}$, l'équation (E) est équivalente à :

$$-3(a^2 + b^2) + 2b + 4a = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - \frac{4a}{3} - \frac{2b}{3} = 0$$

   En passant à la forme canonique, il en résulte que l'équation est équivalente à :

$$(a - \frac{2}{3})^2 - \frac{4}{9} + (b - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9} = 0.$$

   Il en résulte que $|\phi(z)| = 1$ si et seulement si :

$$(\Re(z) - \frac{2}{3})^2 + (\Im(z) - \frac{1}{3})^2 = \frac{5}{9} \text{ et } z \neq \frac{1}{2}.$$

   Comme $(\frac{1}{2} - \frac{2}{3})^2 = \frac{1}{36} \neq \frac{5}{9}$, il en vient que $|\phi(z)| = 1$ si et seulement si :

$$(\Re(z) - \frac{2}{3})^2 + (\Im(z) - \frac{1}{3})^2 = \frac{5}{9}.$$

   En assimilant l'ensemble des complexes à un plan, on en déduit que l'ensemble solutions est un cercle de centre $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

3. Supposons que $2 \leq |z| \leq 3$. On a, en appliquant l'inégalité triangulaire :

$$|\overline{z} - i| \leq |\overline{z}| + |i| \leq 3 + 1 = 4.$$

En appliquant l'autre inégalité triangulaire, on a :

$$|2z - 1| \geq |2|z| - 1| \geq 2|z| - 1 \geq 4 - 1 = 3.$$

D'où :

$$\frac{1}{|2z-1|} \leq \frac{1}{3}.$$

En reprenant l'inégalité $|\overline{z} - i| \leq 4$, comme tous les termes sont positifs, on en déduit que :

$$|\frac{\overline{z} - i}{2z - 1}| \leq \frac{4}{3}.$$

Autrement dit, $|\phi(z)| \leq \frac{4}{3}$.
Pour obtenir l'autre inégalité, on va majorer le dénominateur et minorer le numérateur. On a, en appliquant la deuxième inégalité triangulaire :

$$|\overline{z} - i| \geq |\overline{z}| - 1 \geq 2 - 1 = 1$$

En appliquant la première inégalité triangulaire au dénominateur, on a :

$$|2z - 1| \leq 2|z| + 1 \leq 2 \times 3 + 1 = 7.$$

D'où :

$$\frac{1}{|2z-1|} \geq \frac{1}{7}.$$

De la même manière, il en résulte que :

$$|\phi(z)| \leq \frac{1}{7}.$$

Exercice 5. 1. Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que :

$$\frac{1}{\cos(\theta)^2} = 1 + \tan(\theta)^2.$$

2. En déduire que pour x réel :

$$\frac{1}{\cos(\arctan(x))^2} = 1 + x^2.$$

3. En déduire que pour x réel :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Correction

1. Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Dans ce cas, $\cos(\theta) \neq 0$.

$$\frac{1}{\cos(\theta)^2} = \frac{\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2}{\cos(\theta)^2}.$$

Donc :

$$\frac{1}{\cos(\theta)^2} = \frac{\sin(\theta)^2}{\cos(\theta)^2} + \frac{\cos(\theta)^2}{\cos(\theta)^2}.$$

D'où :

$$\frac{1}{\cos(\theta)^2} = 1 + \tan(\theta)^2. \tag{E}$$

2. La fonction arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc : $\arctan(x) \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. En remplaçant θ par $\arctan(x)$, il vient que :

$$\frac{1}{\cos(\arctan(x))^2} = 1 + \tan(\arctan(x))^2.$$

Or, $\tan(\arctan(x)) = x$, par définition d'une application réciproque. D'où :

$$\frac{1}{\cos(\arctan(x))^2} = 1 + x^2.$$

3. En passant à l'inverse, on obtient, pour x réel :

$$\cos(\arctan(x))^2 = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Donc, en prenant la racine carrée :

$$|\cos(\arctan(x))| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Or, $\arctan(x) \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc $\cos(\arctan(x)) > 0$. D'où :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$