Devoir surveillé 3 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

---

1 Modèle discret d'évolution d'une population

Un des modèles mathématiques utilisé pour étudier l'évolution d'une population biologique est la suite logistique qui est définie ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_1 \in [0,1], & & \\ \forall n \geq 1, & x_{n+1} & = & f_r(x_n), \end{array} \right. \tag{1}$$

où f_r est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{llll} f_r : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & rx(1-x) \end{array} \right.$$

où $r \in]0,4]$.

La valeur x_n correspond au rapport entre la population de la n^{e} génération et de la population maximale de l'espèce étudiée. Dans la suite, on supposera que taille de la population maximale est de 1000 individus. L'objectif est alors d'étudier les propriétés de cette suite.

Propriétés de la fonction f_r

1. Étudier les variations de la fonction f_r.
2. Montrer que la fonction f_r est majorée par $\frac{r}{4}$.
3. Étudier les variations de la fonction $x \longmapsto f_r(x) - x$.

Étude de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$

1. Écrire une fonction `suiteLogistique(r,x1,n)` qui prend en argument deux réels (flottants) et un entier et qui retourne la valeur x_n.
2. Écrire une fonction `estDecroissante(r,n)` qui retourne `True` si la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante jusqu'au rang n et qui renvoie `False` sinon.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $x_n \in [0,1]$. On rappelle que $r \in]0,4]$.

4. On suppose que $r = 1$ pour cette question. On considère la fonction suivante :

```
def fonctionMystere(x1) :
    n=1
    xn=x1
    while xn==0 or xn==1 :
        n=n+1
        xn=suiteLogistique(1,x1,n)
    return n
```

   (a) Quel est le comportement de cette fonction si $x_1 \in \{0, 1\}$?
   (b) En déduire la nature de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ si $x_1 \in \{0, 1\}$.
   (c) Quel est le comportement de cette fonction si $x_1 \in]0, 1[$?

5. On suppose que $x_1 \in]0, 1[$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie en (1) est strictement décroissante.

6. On suppose que $0 < r < 1$ dans cette question.
   (a) Montrer que pour $n \geq 1$, $x_n \leq r^{n-1}$.
   (b) On suppose $r = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{1}{4}$.
      i. Donner l'allure générale de la courbe f_r. On représentera également la droite d'équation $y = x$.
      ii. Sur le précédent graphique, placer x_1 et x_2.
   (c) Conjecturer le comportement de x_n pour n grand. À l'aide de résultats vus au lycée, justifier cette conjecture. En déduire une interprétation sur l'évolution de la population étudiée.

7. On suppose que $1 < r < 2$.
   (a) i. Montrer que l'on a $\frac{r-1}{r} < \frac{r}{4} < \frac{1}{2} < \frac{1}{r}$.
      ii. On suppose que $x_1 = \frac{r-1}{r}$. Quelle est la nature de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$?
      iii. On suppose que $0 < x_1 < \frac{r-1}{r}$. Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante et majorée par $\frac{r-1}{r}$.
      iv. On suppose que $\frac{r-1}{r} < x_1 < \frac{1}{2}$. Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante et minorée par $\frac{r-1}{r}$.
      v. Montrer que si $x_1 \in]\frac{1}{2}, 1]$, alors x_2 vérifie l'une des conditions précédentes.
   (b) On suppose $r = \frac{3}{2}$.
      i. Donner l'allure générale de la courbe f_r. On représentera également la droite d'équation $y = x$.
      ii. On suppose $x_1 = \frac{1}{2}$. Sur le précédent graphique, placer x_1 et x_2. On pourra placer le point $(\frac{r-1}{r}, \frac{r-1}{r})$.
      iii. On suppose $x_1 = \frac{1}{4}$. Placer les points x_1, x_2 sur le même graphique. On les représentera dans une couleur différente.
   (c) Conjecturer le comportement de x_n pour n grand. À l'aide de résultats vus au lycée, justifier cette conjecture. En déduire une interprétation sur l'évolution de la population étudiée.

2 Les séquences de Skolem

Une séquence de Skolem (du nom du mathématicien norvégien Thoralf Skolem) d'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$ est un $2n$-uplet $S = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_{2n})$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

— l'entier k apparaît exactement deux fois dans les composantes de S ;

— les deux apparitions de l'entier k sont distantes de k composantes dans S.

Par exemple, $(4, 5, 1, 1, 4, 3, 5, 2, 3, 2)$ est une séquence de Skolem d'ordre 5 car les deux 1 sont distants de une composante, les deux 2 sont distants de deux composantes, etc.

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés des séquences de Skolem et surtout d'obtenir une condition nécessaire sur l'entier $n \in \mathbb{N}^\star$ pour l'existence de séquences de Skolem d'ordre n. Pour chaque séquence de Skolem $S = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_{2n})$ et pour chaque entier $k \in [\![1, n]\!]$, on notera $(p_k, q_k) \in [\![1, 2n]\!]^2$ l'unique couple tel que $s_{p_k} = s_{q_k} = k$ et $q_k - p_k = k$.

1. (a) Déterminer toutes les séquences de Skolem d'ordre 1.
   (b) Existe-t-il des séquences de Skolem d'ordre 2 ? Justifier votre réponse.
   (c) Existe-t-il des séquences de Skolem d'ordre 3 ? Justifier votre réponse.
   (d) Déterminer un exemple de séquence de Skolem d'ordre 4.
2. Déterminer les couples (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3), (p_4, q_4) et (p_5, q_5) pour la séquence de Skolem $(4, 5, 1, 1, 4, 3, 5, 2, 3, 2)$ de l'énoncé.
3. Désormais, on fixe une séquence de Skolem $S = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_{2n})$ d'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère les applications suivantes :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [\![1, 2n]\!] & \to & [\![1, n]\!] \\ \ell & \mapsto & s_\ell \end{array}, \qquad P : \begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \to & [\![1, 2n]\!] \\ k & \mapsto & p_k \end{array} \quad \text{et} \quad Q : \begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \to & [\![1, 2n]\!] \\ k & \mapsto & q_k \end{array}.$$

   (a) Démontrer que l'application φ est surjective.
   (b) L'application φ est-elle injective ? Si non, déterminer les antécédents de chaque entier $k \in [\![1, n]\!]$.
   (c) Démontrer que l'application P est injective.
   (d) L'application P est-elle surjective ? Si non, déterminer le sous-ensemble des éléments de $[\![1, 2n]\!]$ qui n'admettent pas d'antécédents.
   (e) Étudier brièvement l'injectivité et la surjectivité de l'application Q.
   (f) Calculer $\varphi \circ P$.
   (g) En raisonnant par l'absurde, prouver que $P \circ \varphi \neq \mathrm{Id}_{[\![1,2n]\!]}$.
   (h) Retrouver le résultat de la question précédente en donnant un contre-exemple à l'aide de la séquence de Skolem $(4, 5, 1, 1, 4, 3, 5, 2, 3, 2)$ de l'énoncé.
4. (a) Justifier que $\sum_{k=1}^n p_k + \sum_{k=1}^n q_k = n(2n + 1)$.
   (b) En déduire que $\sum_{k=1}^n p_k = n^2 - \frac{n(n-1)}{4}$.
   (c) Conclure que «n ou $n - 1$ est un multiple de 4» est une condition nécessaire à l'existence d'au moins une séquence de Skolem d'ordre n.
   (d) Discuter de la suffisance de la condition de la question précédente à l'aide des exemples de séquences de Skolem obtenus à la question 1 et l'exemple $(4, 5, 1, 1, 4, 3, 5, 2, 3, 2)$ de l'énoncé.

3 Résolution de systèmes

Exercice 1. On considère le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 7y & + & 3v & + & 5u & = & 16 \\ 8x & + & 4y & + & 6v & + & 2u & = & -16 \\ 2x & + & 6y & + & 4v & + & 8u & = & 16 \\ 5x & + & 3y & + & 7v & + & u & = & -16 \end{array}\right. \tag{S}$$

d'inconnues complexes x, y, u, v.

1. Effectuer les opérations élémentaires suivantes : $L_4 \longleftarrow L_4 + L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$.
2. En posant $X = x + u$ et $Y = y + v$, résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 6x & + & 10y & + & 10v & + & 6u & = & 0 \\ 10x & + & 10y & + & 10v & + & 10u & = & 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

3. En déduire les solutions du système (S).

Exercice 2. Résoudre le système d'inconnues complexes x, y, z et de paramètre complexe m suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (-3-m)x & + & -2y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & (1-m)y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & (1-m)z & = & 0 \end{array}\right. \tag{3}$$