Corrigé du DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

Problème 1 (modélisation mathématique et informatique)

Un des modèles mathématiques utilisés pour étudier l'évolution d'une population biologique est la suite logistique $(x_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $x_1 \in [0,1]$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 1,\ x_{n+1} = f_r(x_n) \tag{1}$$

où f_r est la fonction

$$\begin{aligned} f_r : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto rx(1-x) \end{aligned}$$

et $r \in]0,4]$ est un paramètre fixé. La valeur x_n correspond au rapport de la population de l'espèce étudiée à la n-ième génération sur la population maximale. Dans la suite, on supposera que la taille de la population maximale est de 1000 individus. L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés de cette suite.

A) *Propriétés de la fonction f_r*

1. *Étudier les variations de la fonction f_r.*
2. *Montrer que la fonction f_r est majorée par $\frac{r}{4}$.*
3. *Étudier les variations de la fonction $x \longmapsto f_r(x) - x$.*

B) *Étude de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$*

1. *Écrire une fonction `suiteLogistique(r,x1,n)` qui prend en argument deux réels (flottants) et un entier et qui retourne la valeur de x_n.*
2. *Écrire une fonction `estDecroissante(r,x1,n)` qui retourne `True` si la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante jusqu'au rang n, c'est-à-dire si $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$, et qui renvoie `False` sinon.*
3. *Montrer que $x_n \in [0,1]$ pour tout $n \geqslant 1$. (Indication : on rappelle que $r \in]0,4]$).*
4. *On suppose que $r = 1$ pour cette question et on considère la fonction suivante :*

```
def fonctionMystere(x1) :
    n=1
    xn=x1
    while xn==0 or xn==1 :
        n=n+1
        xn=suiteLogistique(1,x1,n)
    return n
```

   (a) *Quel est le comportement de cette fonction si $x_1 \in \{0,1\}$?*

   (b) *En déduire la nature de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ si $x_1 \in \{0,1\}$.*

   (c) *Quel est le comportement de cette fonction si $x_1 \in]0,1[$?*

5. *On suppose que $r = 1$ et $x_1 \in]0,1[$ pour cette question. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.*
6. *On suppose que $0 < r < 1$ pour cette question.*

   (a) *Montrer que $x_n \leqslant r^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.*

   (b) *On suppose que $r = \frac{1}{2}$ et $x_1 = \frac{1}{4}$.*

      i. *Sur un schéma, donner l'allure générale de la courbe représentative de f_r. On fera également apparaître la droite d'équation $y = x$.*

ii. Sur le schéma précédent, placer x_1 et x_2.

(c) Conjecturer le comportement de x_n lorsque n est grand. À l'aide de résultats vus au lycée, justifier cette conjecture. En déduire une interprétation de l'évolution de la population étudiée.

7. On suppose que $1 < r < 2$ pour cette question.

(a) i. Montrer que $\frac{r-1}{r} < \frac{r}{4} < \frac{1}{2} < \frac{1}{r}$.

ii. On suppose que $x_1 = \frac{r-1}{r}$. Quelle est la nature de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$?

iii. On suppose que $x_1 \in]0, \frac{r-1}{r}[$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante et majorée par $\frac{r-1}{r}$.

iv. On suppose que $x_1 \in]\frac{r-1}{r}, \frac{1}{2}[$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante et minorée par $\frac{r-1}{r}$.

v. Montrer que si $x_1 \in]\frac{1}{2}, 1]$ alors $x_2 = \frac{r-1}{r}$ ou $x_2 \in]0, \frac{r-1}{r}[$ ou $x_2 \in]\frac{r-1}{r}, \frac{1}{2}[$.

(b) On suppose que $r = \frac{3}{2}$.

i. Sur un schéma, donner l'allure générale de la courbe représentative de f_r. On fera également apparaître la droite d'équation $y = x$ et le point de coordonnées $(\frac{r-1}{r}, \frac{r-1}{r})$.

ii. On suppose que $x_1 = \frac{1}{2}$. Sur le schéma précédent, placer x_1 et x_2.

iii. On suppose que $x_1 = \frac{1}{4}$. Toujours sur le même schéma, placer les points x_1 et x_2.

(c) Conjecturer le comportement de x_n lorsque n est grand. À l'aide de résultats vus au lycée, justifier cette conjecture. En déduire une interprétation de l'évolution de la population étudiée.

1 Propriété de la fonction f_r

1. La fonction f_r est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_r'(x) = -2rx + r.$$

Il en résulte que pour $x \in \mathbb{R}$, $f_r'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$, car $r > 0$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f_r'(x)$		$+$			0		$-$		
$f_r(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{r}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2. D'après le tableau de variation, on constate que le maximum est atteint en $\frac{1}{2}$ et il est égal à $\frac{r}{4}$. En particulier, f_r est majorée par $\frac{r}{4}$.
3. La fonction $g : x \longmapsto f_r(x) - x$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -2rx + r - 1.$$

Il en résulte que pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{r-1}{2r}$, car $r > 0$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α_1		$\frac{r-1}{2r}$		α_2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$			0		$-$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{(r-1)^2}{4r}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

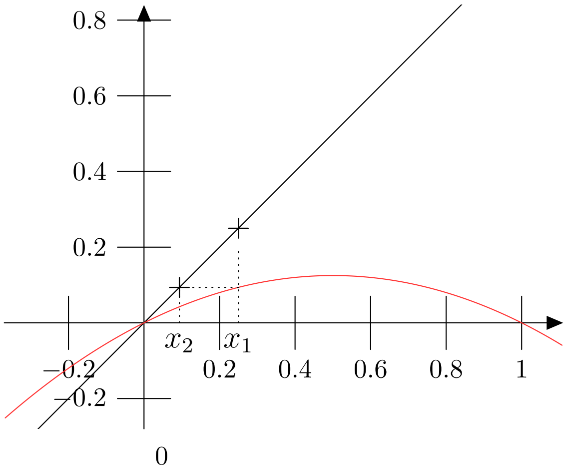
avec $\alpha_1 = \frac{r-1}{r}$, $\alpha_2 = 0$ si $0 < r < 1$, et $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{r-1}{r}$ si $r \geq 1$.

2 Étude de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$

1.
```
def suiteLogistique(r,x1,n) :
    xn=x1
    for i in range(1,n) :
        xn=r*xn*(1-xn)
    return xn
```

2.
```
def estDecroissante(r,x1,n) :
    xn=x1
    for i in range(1,n) :
        yn=r*xn(1-xn)
        if yn>xn :
            return False
    return True
```

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in [0,1]$.
   Pour $n = 1$, $x_1 \in [0,1]$ par hypothèse.
   Supposons que pour un certain n, $x_n \in [0,1]$. D'après le tableau de variation de f_r, on a $f([0,1]) \subset [0, \frac{r}{4}]$. Comme $0 < r \leq 4$, on en déduit que $f([0,1]) \subset [0,1]$. Or, $x_n \in [0,1]$. Donc $f(x_n) \in [0,1]$. Autrement dit, $x_{n+1} \in [0,1]$.
   D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, x_n est un élément de $[0,1]$.
4. (a) Pour $x_1 \in \{0,1\}$, on constate que l'on ne sort jamais de la boucle `while` car dans ce cas, la valeur de x_n étant égale à 0 pour $n \geq 2$.
   (b) On en déduit que la suite est stationnaire.
   (c) Pour $x_1 \in]0,1[$, on constate que l'on ne rentre jamais dans la boucle `while`. En particulier, la valeur de retour est dans ce cas 1.
5. On suppose que $x_1 \in]0,1[$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $x_n \in]0,1[$.
   Pour $n = 1$ ceci est vrai par hypothèse. On suppose que $x_n \in]0,1[$ pour un certain entier n. Or, d'après le tableau de variation de f_1, on a $f(]0,1[) \subset]0, \frac{1}{4}[$. Donc $f_1(x_n) > 0$, ce qui signifie que $x_{n+1} > 0$.
   D'après le principe de récurrence, il en résulte que pour tout $n \geq 1$, $x_n \in]0,1[$.
   Soit $x_1 \in]0,1[$. On vient de montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement positive. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $x_n - x_{n+1} = x_n - x_n(1-x_n) = x_n^2$. Or, $x_n > 0$, donc $x_n^2 > 0$. D'où : $x_n - x_{n+1} > 0$. Autrement dit, $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante.
6. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $P_n : 0 \leq x_n \leq r^{n-1}$. Montrons la proposition par récurrence sur n. Pour $n = 1$, $0 \leq x_1 \leq 1$ par hypothèse. On suppose que pour un certain n,
   $$0 \leq x_n \leq r^{n-1}. \tag{P_n}$$
   Or, $0 \leq x_n \leq 1$. Donc : $1 \geq (1 - x_n) \geq 0$. De plus, $r > 0$. D'où :
   $$0 \leq rx_n(1-x_n) \leq r^{n-1}r(1-x_n),$$
   et
   $$r^{n-1}r(1-x_n) \leq r^n.$$
   Donc : $0 \leq rx_n(1-x_n) \leq r^n$ autrement dit, P_{n+1} est vraie.
   D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \geq 1, x_n \leq r^{n-1}$.
   (b) On représente $f_{\frac{1}{2}}$ en rouge.



(c) Pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq x_n \leq r^{n-1}$, avec $r < 1$. Or, la limite en $+\infty$ de (r^{n-1}) est 0 car $0 < r < 1$. Par le théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes) on en déduit que la limite en $+\infty$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ est 0. Autrement dit, la population en question est vouée à disparaître.

7. On suppose $1 < r < 2$.

(a) Comme $1, r, 2$ sont strictement positifs, par passage à l'inverse, on obtient : $1 > \frac{1}{r} > \frac{1}{2}$, car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
On a $r < 2$, donc $\frac{r}{4} < \frac{1}{2}$.
Reste à montrer que :$\frac{r-1}{r} < \frac{r}{4}$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned}\tfrac{r-1}{r} < \tfrac{r}{4} &\Leftrightarrow r - 1 < \tfrac{r^2}{4}\\ &\Leftrightarrow 0 < \tfrac{r^2}{4} - r + 1\\ &\Leftrightarrow 0 < r^2 - 4r + 4\\ &\Leftrightarrow 0 < (r-2)^2\end{aligned}$$

ce qui est vrai, car $r < 2$. Par transitivité des inégalités, on en déduit que :

$$\frac{r-1}{r} < \frac{r}{4} < \frac{1}{2} < \frac{1}{r}.$$

(b) On constate que $f_r(\frac{r-1}{r}) = (r-1)(1-\frac{r-1}{r}) = \frac{r-1}{r}$. Donc $\frac{r-1}{r}$ est point fixe de f_r. Donc pour $x_1 = \frac{r-1}{r}$, la suite est constante.

(c) D'après son tableau de variation, f_r est strictement croissante sur $]0, \frac{r-1}{r}[$ car $\frac{r-1}{r} < \frac{r}{4}$. on a donc $f_r(]0, \frac{r-1}{r}[) \subset]0, \frac{r-1}{r}[$. Donc la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est valeurs dans $]0, \frac{r-1}{r}[$. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est donc strictement majorée par $\frac{r-1}{r}$. Montrons que la suite est strictement croissante. Soit $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}x_{n+1} - x_n > 0 &\Leftrightarrow rx_n(1-x_n) - x_n > 0\\ &\Leftrightarrow rx_n(1-x_n) > x_n\\ &\Leftrightarrow r(1-x_n) > 1 && \text{car } x_n > 0\\ &\Leftrightarrow (1-x_n) > \tfrac{1}{r} && \text{car } r > 0\\ &\Leftrightarrow \tfrac{r-1}{r} > x_n && \text{ce qui est vrai.}\end{aligned}$$

Donc $(x_n)_{n\geq 1}$ est bien strictement croissante.

(d) La fonction f_r étant strictement croissante sur $]\frac{r-1}{r}, \frac{1}{2}[$, on en déduit que :

$$f_r(]\frac{r-1}{r}, \frac{1}{2}[) \subset]f_r(\frac{r-1}{r}), f_r(\frac{1}{2})[=]\frac{r-1}{r}, \frac{r}{4}[.$$

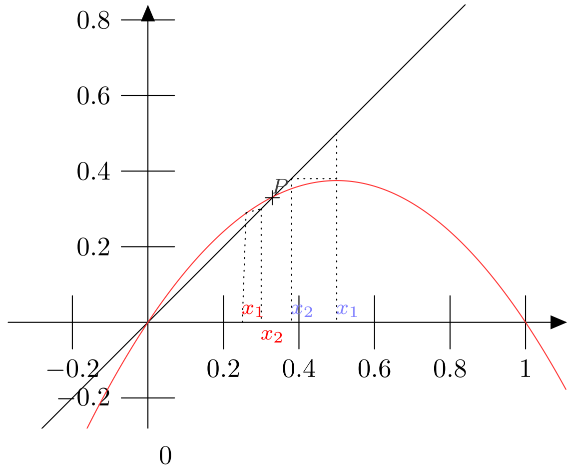
Comme $\frac{r}{4} < \frac{1}{2}$, il en résulte que $f_r(]\frac{r-1}{r}, \frac{1}{2}[) \subset]\frac{r-1}{r}, \frac{1}{2}[$. L'intervalle $]\frac{r-1}{r}, \frac{1}{2}[$ est donc stable par f_r, on en déduit que $(x_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans $]\frac{r-1}{r}, \frac{1}{2}[$. Donc $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement minorée par $\frac{r-1}{r}$. Montrons que $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante. Soit $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}x_n - x_{n+1} > 0 &\Leftrightarrow x_n - rx_n(1-x_n) > 0\\ &\Leftrightarrow x_n > rx_n(1-x_n)\\ &\Leftrightarrow 1 > r(1-x_n) && \text{car } x_n > 0\\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{r} > (1-x_n) && \text{car } r > 0\\ &\Leftrightarrow x_n > \tfrac{r-1}{r} && \text{ce qui est vrai}\end{aligned}$$

Donc la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante et minorée par $\frac{r-1}{r}$.

(e) Supposons que $x_1 \in]\frac{1}{2}, 1]$. Si $x_1 = 1$, la suite est stationnaire, cas déjà traité.
Supposons que $x_1 \in]\frac{1}{2}, 1[$.
— Cas 1 : $x_1 = \frac{1}{r}$. Dans ce cas, $f_r(x_1) = \frac{r-1}{r}$ qui correspond au cas où $x_2 = \frac{r-1}{r}$.
— Cas 2 : $x_1 \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{r}[$. Or, on a : $f_r([\frac{1}{2}, \frac{1}{r}[) \subset]\frac{r-1}{r}, \frac{r}{4}]$ et donc $\frac{r-1}{r} < x_2 \leq \frac{r}{4} < \frac{1}{2}$. Donc $x_2 \in]\frac{r-1}{r}, \frac{1}{2}[$.
— Cas 3 : $x_1 \in]\frac{1}{r}, 1[$. On a :$f_r(]\frac{1}{r}, 1[) \subset]0, \frac{r-1}{r}[$. Donc $x_2 \in]0, \frac{r-1}{r}[$. Cas également traité.
Dans tous les cas, en considérant x_2, on constate que l'étude de la suite se ramène aux cas vus précédemment.

(f) Représentons graphiquement les éléments demandés :
i. Première bissectrice : courbe noire. graphe de $f_{\frac{3}{2}}$: courbe rouge.
ii. En bleu : $x_1 = \frac{1}{2}$.
iii. En rouge : $x_1 = \frac{1}{4}$.



(g) On constate que dans tous les cas, la suite est monotone à partir du rang 2 et bornée. On en déduit qu'elle est convergente. La fonction f_r étant continue, les limites possibles sont les points fixes de f_r qui sont égaux à 0 et à $\frac{r-1}{r}$.
— Pour $x_1 \in]0, \frac{r-1}{r}[$, on a vu que la suite est alors strictement croissante et majorée. Elle ne peut donc pas converger vers 0. Elle tend alors vers la seule autre limite possible : $\frac{r-1}{r}$.
— Pour $x_1 = \frac{r-1}{r}$, on a vu que la suite est constante et a comme limite $\frac{r-1}{r}$.
— Pour $x_1 \in]\frac{r-1}{r}, \frac{1}{2}[$, la suite est minorée par $\frac{r-1}{r}$ et ne peut donc converger vers 0. Comme elle est convergente, elle tend vers la seule autre limite possible, $\frac{r-1}{r}$.
— si $x_1 \in [\frac{1}{2}, 1[$, on a vu alors que $x_2 \in]0, \frac{1}{2}[$. Or, les suites $(x_n)_{n\geq 2}$ et $(x_n)_{n\geq 1}$ sont de même nature et ont même limite. Donc la limite est aussi $\frac{r-1}{r}$.
Le nombre d'individus se stabilise autour de la valeur $1000\frac{r-1}{r}$.

Problème 2 (Méthodes de calcul et raisonnement)

Solution proposée par S. Godillon. *Une séquence de Skolem (du nom du mathématicien norvégien Thoralf Skolem spécialiste de logique mathématique et de théorie des ensembles) d'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$ est un $2n$-uplet $S = (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2n})$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:*
— l'entier k apparaît exactement deux fois dans les composantes de S ;
— les deux apparitions de l'entier k sont distantes de k composantes dans S.
Par exemple, $(4, 5, 1, 1, 4, 3, 5, 2, 3, 2)$ est une séquence de Skolem d'ordre 5 car les deux 1 sont distants de une composante, les deux 2 sont distants de deux composantes, etc.
Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés des séquences de Skolem et surtout d'obtenir une condition nécessaire sur l'entier $n \in \mathbb{N}^\star$ pour l'existence de séquences de Skolem d'ordre n. Pour chaque séquence de Skolem $S = (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2n})$ et pour chaque entier $k \in [\![1, n]\!]$, on notera $(p_k, q_k) \in [\![1, 2n]\!]^2$ l'unique couple tel que $s_{p_k} = s_{q_k} = k$ et $q_k - p_k = k$.

1. (a) Déterminer toutes les séquences de Skolem d'ordre 1.

▶ Une séquences de Skolem d'ordre 1 est un couple $S = (s_1, s_2)$ tel que l'entier 1 apparaît exactement deux fois dans les composantes de S, donc tel que $s_1 = s_2 = 1$. De plus $S = (1, 1)$ est bien une séquence de Skolem d'ordre 1 puisque les deux apparitions de l'entier 1 sont distantes de 1 composante dans S. $\boxed{\text{Il n'existe donc qu'une seule séquence de Skolem d'ordre 1 qui est } (1,1)}$.

(b) *Existe-t-il des séquences de Skolem d'ordre 2 ? Justifier votre réponse.*

► Une séquences de Skolem d'ordre 2 est un quadruplet $S = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ tel que les entiers 1 et 2 apparaissent chacun exactement deux fois dans les composantes de S. Il y a donc $\binom{4}{2}\binom{4-2}{2} = 6$ séquences de Skolem d'ordre 2 possibles (nombre d'anagramme de mots de 4 lettres ayant deux lettres différentes répétées chacune deux fois) qui sont :

— $(1,2,1,2)$, $(1,2,2,1)$ et $(2,1,2,1)$ qui ne sont pas des séquences de Skolem car les deux apparitions de l'entier 1 ne sont pas distantes de 1 composante ;

— $(1,1,2,2)$, $(2,1,1,2)$ et $(2,2,1,1)$ qui ne sont pas des séquences de Skolem car les deux apparitions de l'entier 2 ne sont pas distantes de 2 composantes.

Finalement, $\boxed{\text{il n'existe pas de séquences de Skolem d'ordre 2}}$.

(c) *Existe-t-il des séquences de Skolem d'ordre 3 ? Justifier votre réponse.*

► En raisonnant comme à la question précédente, il existe $\binom{6}{2}\binom{6-2}{2}\binom{6-2-2}{2} = 15 \times 6 \times 1 = 90$ sextuplets $S = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ tels que les entiers 1, 2 et 3 apparaissent chacun exactement deux fois dans les composantes de S, ce qui donne 90 séquences de Skolem d'ordre 3 possibles. Parmi ces possibilités, il y a :

— $\binom{4}{2}\binom{4-2}{2} = 6$ séquences telles $s_1 = s_3 = 1$, c'est-à-dire du type $(1, s_2, 1, s_4, s_5, s_6)$;
— $\binom{4}{2}\binom{4-2}{2} = 6$ séquences telles $s_1 = s_4 = 1$, c'est-à-dire du type $(1, s_2, s_3, 1, s_5, s_6)$;
— $\binom{4}{2}\binom{4-2}{2} = 6$ séquences telles $s_1 = s_5 = 1$, c'est-à-dire du type $(1, s_2, s_3, s_4, 1, s_6)$;
— $\binom{4}{2}\binom{4-2}{2} = 6$ séquences telles $s_1 = s_6 = 1$, c'est-à-dire du type $(1, s_2, s_3, s_4, s_5, 1)$;
— $\binom{4}{2}\binom{4-2}{2} = 6$ séquences telles $s_2 = s_4 = 1$, c'est-à-dire du type $(s_1, 1, s_3, 1, s_5, s_6)$;
— $\binom{4}{2}\binom{4-2}{2} = 6$ séquences telles $s_2 = s_5 = 1$, c'est-à-dire du type $(s_1, 1, s_3, s_4, 1, s_6)$;
— $\binom{4}{2}\binom{4-2}{2} = 6$ séquences telles $s_2 = s_6 = 1$, c'est-à-dire du type $(s_1, 1, s_3, s_4, s_5, 1)$;
— $\binom{4}{2}\binom{4-2}{2} = 6$ séquences telles $s_3 = s_5 = 1$, c'est-à-dire du type $(s_1, s_2, 1, s_4, 1, s_6)$;
— $\binom{4}{2}\binom{4-2}{2} = 6$ séquences telles $s_3 = s_6 = 1$, c'est-à-dire du type $(s_1, s_2, 1, s_4, s_5, 1)$;
— $\binom{4}{2}\binom{4-2}{2} = 6$ séquences telles $s_4 = s_6 = 1$, c'est-à-dire du type $(s_1, s_2, s_3, 1, s_5, 1)$;

ce qui donne $10 \times 6 = 60$ possibilités qui ne sont pas des séquences de Skolem car les deux apparitions de l'entier 1 ne sont pas distantes de 1 composante.

On peut bien sûr raccourcir la rédaction en dénombrant le nombre de façons de placer les deux apparitions de l'entier 1 dans le sextuplet afin qu'elles soient distantes d'au moins 2 composantes, ce qui donne 4 façons si la première apparition de l'entier 1 est s_1, puis 3 façons pour s_2, 2 façons pour s_3 et 1 façon pour s_4, c'est-à-dire $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

Il reste $90 - 60 = 30$ possibilités qui sont partitionnées en $60/6 = 5$ cas disjoints.

1er cas : 6 séquences telles que $s_1 = s_2 = 1$, c'est-à-dire du type $(1, 1, s_3, s_4, s_5, s_6)$. Alors la seule possibilité telle que les deux apparitions de l'entier 3 soient distantes de 3 composantes est $(1, 1, 3, 2, 2, 3)$ mais ce n'est pas une séquence de Skolem car les deux apparitions de l'entier 2 ne sont pas distantes de 2 composantes. Ainsi, aucune possibilité de ce cas n'est une séquence de Skolem.

2e cas : 6 séquences telles que $s_2 = s_3 = 1$, c'est-à-dire du type $(s_1, 1, 1, s_4, s_5, s_6)$. En raisonnant comme dans le 1er cas, la seule possibilité telle que les deux apparitions de l'entier 3 soient distantes de 3 composantes est $(3, 1, 1, 3, 2, 2)$ mais ce n'est pas une séquence de Skolem.

3e cas : 6 séquences telles que $s_3 = s_4 = 1$, c'est-à-dire du type $(s_1, s_2, 1, 1, s_5, s_6)$. De même, la seule possibilité telle que les deux apparitions de l'entier 3 soient distantes de 3 composantes est $(2, 3, 1, 1, 3, 2)$ mais ce n'est pas une séquence de Skolem.

4e cas : 6 séquences telles que $s_4 = s_5 = 1$, c'est-à-dire du type $(s_1, s_2, s_3, 1, 1, s_6)$. De même, la seule possibilité telle que les deux apparitions de l'entier 3 soient distantes de 3 composantes est $(2, 2, 3, 1, 1, 3)$ mais ce n'est pas une séquence de Skolem.

5e cas : 6 séquences telles que $s_5 = s_6 = 1$, c'est-à-dire du type $(s_1, s_2, s_3, s_4, 1, 1)$. De même, la seule possibilité telle que les deux apparitions de l'entier 3 soient distantes de 3 composantes est

$(3,2,2,3,1,1)$ mais ce n'est pas une séquence de Skolem.
Ainsi, dans chacun des cas, aucune des possibilités n'est une séquence de Skolem. Finalement $\boxed{\text{il n'existe pas de séquences de Skolem d'ordre 3}}$.

La difficulté de se type de questions est d'être extrêmement bien organisé pour ne pas oublier des possibilités. Pour cela, utilisez les méthodes de dénombrement afin de compter tous les cas possibles. Le plus important est de convaincre le correcteur que vous avez traité toutes les possibilités.

(d) *Déterminer un exemple de séquence de Skolem d'ordre 4.*

▶ Par exemple, $\boxed{(1,1,3,4,2,3,2,4)}$ est une séquence de Skolem d'ordre 4.

Il n'existe que six séquences de Skolem d'ordre 4 qui sont :

$$\begin{array}{lll} (1,1,3,4,2,3,2,4), & (1,1,4,2,3,2,4,3), & (2,3,2,4,3,1,1,4), \\ (4,2,3,2,4,3,1,1), & (3,4,2,3,2,4,1,1), & (4,1,1,3,4,2,3,2). \end{array}$$

Pour déterminer cette liste, on peut par exemple écrire un petit algorithme en Python.

2. *Déterminer les couples (p_1,q_1), (p_2,q_2), (p_3,q_3), (p_4,q_4) et (p_5,q_5) pour la séquence de Skolem $(4,5,1,1,4,3,5,2,3,2)$ de l'énoncé.*

▶ On note $S=(s_1,s_2,\dots,s_{10})=(4,5,1,1,4,3,5,2,3,2)$ la séquence de Skolem de l'énoncé. Alors :

$$s_3=s_4=1,\ \ s_8=s_{10}=2,\ \ s_6=s_9=3,\ \ s_1=s_5=4 \text{ et } s_2=s_7=5.$$

On en déduit que

$$\boxed{(p_1,q_1)=(3,4),\ (p_2,q_2)=(8,10),\ (p_3,q_3)=(6,9),\ (p_4,q_4)=(1,5) \text{ et } (p_5,q_5)=(2,7)}.$$

3. *Désormais, on fixe une séquence de Skolem $S=(s_1,s_2,s_3,\dots,s_{2n})$ d'ordre $n\in\mathbb{N}^\star$. On considère les applications suivantes :*

$$\varphi:\begin{array}{ccc}[\![1,2n]\!] & \to & [\![1,n]\!] \\ \ell & \mapsto & s_\ell\end{array},\qquad P:\begin{array}{ccc}[\![1,n]\!] & \to & [\![1,2n]\!] \\ k & \mapsto & p_k\end{array}\quad \text{et} \quad Q:\begin{array}{ccc}[\![1,n]\!] & \to & [\![1,2n]\!] \\ k & \mapsto & q_k\end{array}.$$

(a) *Démontrer que l'application φ est surjective.*

▶ Soit $k\in[\![1,n]\!]$. On cherche au moins un antécédent de k par φ, c'est-à-dire un entier $\ell\in[\![1,2n]\!]$ tel que $\varphi(\ell)=k$. Or $\varphi(\ell)=s_\ell$ et $s_{p_k}=s_{q_k}=k$ d'après l'énoncé. Il suffit donc de poser $\ell=p_k$ car alors $\varphi(\ell)=s_\ell=s_{p_k}=k$. Ainsi on a :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ \exists \ell\in[\![1,2n]\!],\ \varphi(\ell)=k$$

ce qui prouve que $\boxed{\varphi \text{ est surjective}}$.

(b) *L'application φ est-elle injective ? Si non, déterminer les antécédents de chaque entier $k\in[\![1,n]\!]$.*

▶ D'après l'énoncé, chaque entier $k\in[\![1,n]\!]$ apparaît exactement deux fois dans les composantes de S et ces deux apparitions sont $s_{p_k}=s_{q_k}=k$ avec $p_k\neq q_k$ car $q_k-p_k=k\neq 0$. Puisque $\varphi:\ell\mapsto s_\ell$, on en déduit que chaque entier $k\in[\![1,n]\!]$ admet exactement deux antécédents qui sont $\boxed{p_k \text{ et } q_k}$ et donc que $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective}}$.

N'oubliez pas de préciser que $p_k\neq q_k$ puisque le point important à justifier est que les deux antécédents p_k et q_k sont bien différents. On peut également raisonner par l'absurde : si φ est injective alors $\varphi:[\![1,2n]\!]\to[\![1,n]\!]$ est bijective d'après le résultat de la question précédente et donc $2n=\operatorname{card}([\![1,2n]\!])=\operatorname{card}([\![1,n]\!])=n$ ce qui est absurde car $n\neq 0$. Mais ce raisonnement ne donne pas les antécédents de chaque entier $k\in[\![1,n]\!]$.

(c) *Démontrer que l'application P est injective.*

▶ Soit $(k_1, k_2) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $P(k_1) = P(k_2)$, c'est-à-dire tel que $p_{k_1} = p_{k_2}$. Donc $s_{p_{k_1}} = s_{p_{k_2}}$ et par conséquent $k_1 = s_{p_{k_1}} = s_{p_{k_2}} = k_2$ (par définition de p_{k_1} et p_{k_2}). Ainsi, on a :

$$\forall (k_1, k_2) \in [\![1, n]\!]^2,\ P(k_1) = P(k_2) \Longrightarrow k_1 = k_2$$

ce qui prouve que $\boxed{P \text{ est injective}}$.

(d) *L'application P est-elle surjective ? Si non, déterminer le sous-ensemble des éléments de $[\![1, 2n]\!]$ qui n'admettent pas d'antécédents.*

▶ D'après l'énoncé, chaque entier $\ell \in [\![1, 2n]\!]$ est soit de la forme $\ell = p_k$ soit de la forme $\ell = q_k$ où $k = s_\ell$. Dans le premier cas, k est un antécédent de $\ell = p_k = P(k)$. Dans le deuxième cas, ℓ n'admet pas d'antécédents car sinon $q_k = \ell = p_{k'}$ pour un certain $k' \in [\![1, n]\!]$ donc $k = s_{p_k} = s_{q_{k'}} = k'$ (par définition de p_k et $q_{k'}$) ce qui conduit à l'absurdité $0 = q_k - p_{k'} = q_k - p_k = k \neq 0$. On en déduit que chaque élément de l'ensemble $\boxed{\{\ell \in [\![1, 2n]\!] \mid \ell = q_{s_\ell}\} = \{q_k,\ k \in [\![1, n]\!]\}}$ n'admet pas d'antécédents et donc que $\boxed{P \text{ n'est pas surjective}}$.

On peut également raisonner par l'absurde : si P est surjective alors $P : [\![1, n]\!] \to [\![1, 2n]\!]$ est bijective d'après le résultat de la question précédente et donc $n = \mathrm{card}([\![1, n]\!]) = \mathrm{card}([\![1, 2n]\!]) = 2n$ ce qui est absurde car $n \neq 0$. Mais ce raisonnement ne donne pas le sous-ensemble des éléments de $[\![1, 2n]\!]$ qui n'admettent pas d'antécédents.

(e) *Étudier brièvement l'injectivité et la surjectivité de l'application Q.*

▶ En raisonnant comme dans les deux questions précédentes pour l'application P, on en déduit que $\boxed{Q \text{ est injective}}$, que chaque élément de l'ensemble $\{\ell \in [\![1, 2n]\!] \mid \ell = p_{s_\ell}\} = \{p_k,\ k \in [\![1, n]\!]\}$ n'admet pas d'antécédents et donc que $\boxed{Q \text{ n'est pas surjective}}$.

(f) *Calculer $\varphi \circ P$.*

▶ Puisque $\varphi : [\![1, 2n]\!] \to [\![1, n]\!]$ et $P : [\![1, n]\!] \to [\![1, 2n]\!]$, on obtient que $\varphi \circ P : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$. De plus, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}(\varphi \circ P)(k) &= \varphi(P(k)) \\ &= \varphi(p_k) \quad \text{(par définition de } P) \\ &= s_{p_k} \quad \text{(par définition de } \varphi) \\ &= k \quad \text{(d'après l'énoncé).}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\varphi \circ P = \mathrm{Id}_{[\![1, n]\!]}}$.

(g) *En raisonnant par l'absurde, prouver que $P \circ \varphi \neq \mathrm{Id}_{[\![1, 2n]\!]}$.*

▶ On suppose que $P \circ \varphi = \mathrm{Id}_{[\![1, 2n]\!]}$. Puisque $\varphi \circ P = \mathrm{Id}_{[\![1, n]\!]}$ d'après le résultat de la question précédente, on obtient que φ et P sont applications inverses l'une de l'autre et donc que φ et P sont bijectives. Ceci est absurde car on a démontré à la question 3(b) que φ n'est pas injective donc pas bijective (ou à la question 3(d) que P n'est pas surjective donc pas bijective). Puisque l'hypothèse aboutit à une absurdité, on en déduit qu'elle est fausse, c'est-à-dire que $\boxed{P \circ \varphi \neq \mathrm{Id}_{[\![1, 2n]\!]}}$.

(h) *Retrouver le résultat de la question précédente en donnant un contre-exemple à l'aide de la séquence de Skolem $(4, 5, 1, 1, 4, 3, 5, 2, 3, 2)$ de l'énoncé.*

▶ En utilisant les résultats obtenus à la question 2, on a par exemple :

$$(P \circ \varphi)(4) = P(\varphi(4)) = P(s_4) = P(1) = p_1 = 3 \neq 4.$$

Par conséquent, $\boxed{P \circ \varphi \neq \mathrm{Id}_{[\![1, 2n]\!]}}$.

On peut également utiliser $(P\circ\varphi)(10)=8$, $(P\circ\varphi)(9)=6$, $(P\circ\varphi)(5)=1$ ou $(P\circ\varphi)(7)=2$.

4. (a) *Justifier que $\sum_{k=1}^{n} p_k + \sum_{k=1}^{n} q_k = n(2n+1)$.*

▶ Puisque chaque entier $\ell \in [\![1,2n]\!]$ est soit de la forme $\ell = p_k$ soit de la forme $\ell = q_k$ où $k = s_\ell \in [\![1,n]\!]$, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k + \sum_{k=1}^{n} q_k = \sum_{\ell=1}^{2n} \ell = \frac{2n(2n+1)}{2} = \boxed{n(2n+1)}$$

d'après la formule de la somme des premiers entiers.

(b) *En déduire que $\sum_{k=1}^{n} p_k = n^2 - \frac{n(n-1)}{4}$.*

▶ D'après l'énoncé, on a $q_k - p_k = k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, donc $q_k = k + p_k$. On en déduit d'après le résultat de la question précédente que :

$$n(2n+1) = \sum_{k=1}^{n} p_k + \sum_{k=1}^{n} q_k = \sum_{k=1}^{n} p_k + \sum_{k=1}^{n}(k+p_k) = 2\sum_{k=1}^{n} p_k + \frac{n(n+1)}{2}$$

et par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \frac{n(2n+1) - \frac{n(n+1)}{2}}{2} = \frac{4n^2+2n-n^2-n}{4} = n^2 + \frac{n-n^2}{4} = \boxed{n^2 - \frac{n(n-1)}{4}}.$$

(c) *Conclure que «n ou $n-1$ est un multiple de 4» est une condition nécessaire à l'existence d'au moins une séquence de Skolem d'ordre n.*

▶ On suppose qu'il existe une séquence de Skolem $S = (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2n})$ d'ordre n. D'après le résultat de la question précédente, on obtient que :

$$\frac{n(n-1)}{4} = n^2 - \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

Or $p_k \in [\![1,2n]\!]$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ donc $\sum_{k=1}^{n} p_k$ est un entier comme somme d'entiers. Par conséquent, $\frac{n(n-1)}{4}$ est un entier comme différence d'entiers, d'où $n(n-1)$ est un multiple de 4. On en déduit deux cas disjoints : soit n ou $n-1$ est un multiple de 4 soit n et $n-1$ sont des multiples de 2. Or le deuxième cas est absurde car n et $n-1$ sont deux entiers consécutifs donc de parité différente. Par conséquent, s'il existe une séquence de Skolem d'ordre n alors n ou $n-1$ est un multiple de 4. Autrement dit $\boxed{\text{«}n\text{ ou }n-1\text{ est un multiple de 4» est une condition nécessaire à l'existence d'au moins une séquence de Skolem d'ordre }n}$.

Attention à ne pas oublier le cas où n et $n-1$ sont des multiples de 2. Même si ce cas est absurde, il faut montrer que votre raisonnement est exhaustif. De plus, rédigez votre réponse pour bien mettre en avant la nécessité de la condition afin de répondre précisément à la question.

(d) *Discuter de la suffisance de la condition de la question précédente à l'aide des exemples de séquences de Skolem obtenus à la question 1 et l'exemple $(4,5,1,1,4,3,5,2,3,2)$ de l'énoncé.*

▶ Dire que la condition de la question précédente est suffisante à l'existence d'au moins une séquence de Skolem d'odre n revient à dire que l'implication suivante est vraie :

«n ou $n-1$ est un multiple de 4» $\Longrightarrow$ «il existe une séquence de Skolem d'ordre n»

Par conséquent, dire que la condition de la question précédente n'est pas suffisante à l'existence d'au moins une séquence de Skolem d'ordre n revient à dire que l'implication précédente est fausse, c'est-à-dire à trouver un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que :

«n ou $n-1$ est un multiple de 4» et «il n'existe pas de séquence de Skolem d'ordre n»

Or on a :

— $1-1=0$ est un multiple de 4 et il existe une seule séquence de Skolem d'ordre 1 (résultat de la question 1(a)) ;
— 2 et $2-1=1$ ne sont pas multiples de 4 ;
— 3 et $3-1=2$ ne sont pas multiples de 4 ;
— 4 est un multiple de 4 et il existe au moins une séquence de Skolem d'ordre 4 (résultat de la question 1(d)) ;
— $5-1=4$ est un multiple de 4 et il existe au moins une séquence de Skolem d'ordre 5 (d'après l'énoncé).

Puisqu'on n'a pas obtenu de contre-exemples pour les premières valeurs de n (de 1 à 5), on peut conjecturer que $\boxed{\text{«}n \text{ ou } n-1 \text{ est un multiple de 4» est une condition suffisante à l'existence d'au moins une séquence de Skolem d'ordre } n}$. Et si on démontre cette conjecture, on prouvera que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \text{«il existe une séquence de Skolem d'ordre } n\text{»} \iff \text{«}n \text{ ou } n-1 \text{ est un multiple de 4»}$$

ce qu'on a déjà montré pour tout $n \in [\![1,5]\!]$.

Soyez très précis pour rédiger la réponse à ce type de question de logique mathématique. Pour cela, utilisez le vocabulaire du cours de logique afin de montrer au correcteur que vous avez compris l'objectif de l'énoncé. De plus, soyez rigoureux en écrivant seulement les arguments nécessaires à votre raisonnement. Par exemple ici, citer les résultats des questions 1(b) et 1(c) fait perdre des points car ils ne justifient en rien la suffisance de la condition (ils justifient la nécessité qu'on a déjà prouvé à la question précédente).

Pour les curieux, l'équivalence ci-dessus est effectivement vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ mais la démonstration de ce théorème dépasse largement le cadre du programme de BCPST (mais nous venons quand même de faire la moitié du travail en prouvant que la condition est nécessaire).

Exercice 1

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + 7y + 3v + 5u = 16 \\ 8x + 4y + 6v + 2u = -16 \\ 2x + 6y + 4v + 8u = 16 \\ 5x + 3y + 7v + u = -16 \end{cases} \tag{S}$$

d'inconnues complexes x, y, u, v.

1. *Effectuer les opérations élémentaires suivantes : $L_4 \longleftarrow L_4 + L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$.*
2. *En posant $X = x+u$ et $Y = y+v$, résoudre le système*

$$\begin{cases} 6x + 10y + 10v + 6u = 0 \\ 10x + 10y + 10v + 10u = 0 \end{cases} \tag{2}$$

3. *En déduire les solutions du système* (S).

1. En appliquant les opérations élémentaires proposées, on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + 7y + 3v + 5u = 16 \\ 8x + 4y + 6v + 2u = -16 \\ 10x + 10y + 10v + 10u = 0 \\ 6x + 10y + 10v + 6u = 0 \end{cases}$$

2. En posant $X = x + u$ et $Y = y + v$, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} 6X + 10Y &= 0 \\ 10X + 10Y &= 0 \end{cases} \tag{3}$$

En effectuant $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$, le système est alors équivalent à :

$$\begin{cases} 6X + 10Y &= 0 \\ 4X &= 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont donc :$X = 0$ et $Y = 0$. En revenant au système initial, on en déduit que les solutions sont :

$$S = \{(-t, -t', t, t'), (t, t') \in \mathbb{C}^2\}.$$

En revenant à (S), on en déduit que $x = -u$ et $y = -v$. Le système est alors équivalent à :

$$\begin{cases} x + 7y + 3v + 5u &= 16 \\ 8x + 4y + 6v + 2u &= -16 \\ x + u &= 0 \\ y + v &= 0 \end{cases}$$

En remplaçant u par $-x$ et v par $-y$, le système est alors équivalent à :

$$\begin{cases} -4x + 4y &= 16 \\ 6x - 2y &= -16 \\ x &= -u \\ y &= -v \end{cases}$$

En remplaçant L_2 par $2L_2 + L_1$ on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} -4x + 4y &= 16 \\ 8x &= -16 \\ x &= -u \\ y &= -v \end{cases}$$

On obtient alors comme solution : $x = -2, y = 2, u = 2, v = -2$.

Exercice 2

Résoudre le système d'inconnues complexes x, y, z et de paramètre complexe m suivant :

$$\begin{cases} (-3-m)x + -2y - 2z &= 0 \\ 2x + (1-m)y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + (1-m)z &= 0 \end{cases} \tag{4}$$

En appliquant les opérations élémentaires suivantes, $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} (-3-m)x + -2y - 2z &= 0 \\ (-1-m)x + (-1-m)y &= 0 \\ (-1-m)x + (-1-m)z &= 0 \end{cases}$$

— Cas 1 : $m = -1$.
Le système est alors équivalent à :

$$-2x - 2y - 2z = 0. \tag{5}$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions est : $S = \{(-t, -t', t, t'), (t, t') \in \mathbb{C}\}$.

— Cas 2 : $m \neq -1$.
Le système est alors équivalent à :

$$\begin{cases} (1-m)x &= 0 \\ y &= -x \\ z &= -x \end{cases}$$

- — Sous-cas 1 : $m = 1$. L'ensemble des solutions est alors $S = \{(t, -t, -t), t \in \mathbb{C}\}$.
- — Sous-cas 2 : $m \neq 1$. Dans ce cas, $x = 0$ et donc $y = 0, z = 0$. Autrement dit, $S = \{(0, 0, 0)\}$.