Devoir surveillé 4 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. On considère la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{e^t}{1+t^2}. \end{array}$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f". On écrira f" sous la forme $\frac{e^t P(t)}{(1+t^2)^3}$ où P est un polynôme.
5. Montrer que l'équation $f"(x) = 0$ admet deux solutions réelles. L'une est évidente, l'autre est notée α. On n'explicitera pas la valeur de α. On pourra démontrer l'existence et l'unicité de α à l'aide du théorème de la bijection continue.
6. Montrer que $\frac{-1}{4} < \alpha < 0$.
7. Donner l'allure du graphe de f à l'aide des tangentes au point $(0, f(0))$, au point $(1, f(1))$ et des limites en $+\infty$, $-\infty$.

   Pour la suite, on admet que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. L'objectif est de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{A}_n$:

   $$\text{il existe un polynôme } P_n \text{ tel que : } \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

   est vraie, où $f^{(n)}$ désigne la fonction obtenue en dérivant la fonction f n fois.
8. D'après les précédentes questions, on sait que $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont vraies. Rappeler les expressions de P_0, P_1, P_2. On écrira sous forme développée.
9. On suppose que $\mathcal{A}_n$ est vraie pour un certain entier n. Montrer que $\mathcal{A}_{n+1}$ est vraie. On exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et de P_n'.
10. Conclure.
11. Montrer que les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à coefficients entiers.
12. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n(i) = 2^n n!(-i)^n$, où i vérifie $i^2 + 1 = 0$.

Exercice 2. Pour tout entier k et tout entier n vérifiant $0 \leq k \leq n$, on pose :

$$I_k(n) = \binom{n}{k} \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k} dx.$$

1. Montrer que pour $0 \leq k \leq n-1$, $I_{k+1}(n) = I_k(n)$. On pourra effectuer une intégration par parties (en la justifiant), en considérant les fonctions $x \longmapsto x^k$ et $x \longmapsto (1-x)^{n-k}$.
2. En déduire la valeur de $I_k(n)$ pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$.
3. Soit $0 \leq k \leq n$. Calculer $\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k} dx$.

Exercice 3. L'objectif est de déterminer la nature de la suite définie par :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n \ln(n)} \tag{1}$$

pour tout $n \geq 2$.

1. Écrire une fonction Python qui prend en un argument un entier n et qui renvoie la valeur de S_n. Si $n < 2$, on affiche un message d'erreur et on renvoie la valeur 0.
   On supposera que le logarithme est bien défini et qu'il correspond à la fonction `log`.
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \leq x$.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})$.
5. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \leq \frac{1}{n \ln(n)}$. On pourra utiliser les propriétés du logarithme ainsi que les résultats des deux questions précédentes.
6. En déduire que pour tout $N \geq 2$, on a :
   $$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \leq S_N.$$
7. En déduire la nature de $(S_n)_{n\geq 2}$ et sa limite si elle existe.

Exercice 4. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle définie par :

$$y'' = \mu y.$$

où y est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer les solutions de cette équation en fonction du paramètre μ.