Devoir surveillé 4 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. On considère la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{e^t}{1+t^2}. \end{array}$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f". On écrira f" sous la forme $\frac{e^t P(t)}{(1+t^2)^3}$ où P est un polynôme.
5. Montrer que l'équation $f"(x) = 0$ admet deux solutions réelles. L'une est évidente, l'autre est notée α. On n'explicitera pas la valeur de α. On pourra démontrer l'existence et l'unicité de α à l'aide du théorème de la bijection continue.
6. Montrer que $\frac{-1}{4} < \alpha < 0$.
7. Donner l'allure du graphe de f à l'aide des tangentes au point $(0, f(0))$, au point $(1, f(1))$ et des limites en $+\infty$, $-\infty$.

   Pour la suite, on admet que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. L'objectif est de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{A}_n$:

   $$\text{il existe un polynôme } P_n \text{ tel que : } \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

   est vraie, où $f^{(n)}$ désigne la fonction obtenue en dérivant la fonction f n fois.
8. D'après les précédentes questions, on sait que $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont vraies. Rappeler les expressions de P_0, P_1, P_2. On écrira sous forme développée.
9. On suppose que $\mathcal{A}_n$ est vraie pour un certain entier n. Montrer que $\mathcal{A}_{n+1}$ est vraie. On exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et de P_n'.
10. Conclure.
11. Montrer que les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à coefficients entiers.
12. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n(i) = 2^n n!(-i)^n$, où i vérifie $i^2 + 1 = 0$.

Correction

1. La fonction $f_1 : t \mapsto 1 + t^2$ étant polynomiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, elle ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Il est connu que la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le quotient de exp par f_1. Calculons sa dérivée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

2. On a :
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$$
Donc :
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$
On sait que par croissance comparée,
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$
Or, $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$. Donc :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$
Par produit des limites, on en déduit que :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1+x^2} = +\infty.$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}.$$
Donc f' est positive et ne s'annule qu'en 1. Ainsi, on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. La fonction $f_2 : x \mapsto e^x(x-1)^2$ étant le produit de la fonction exponentielle et d'une fonction polynôme qui sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $f_3 : x \mapsto (1+t^2)^2$ étant un polynôme, on en déduit qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme f_3 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de f_2 par f_3 qui sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f"(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2} + \frac{e^x 2(x-1)}{(1+x^2)^2} - \frac{e^x(x-1)^2 4x}{(1+x^2)^3}.$$
En factorisant par $\frac{e^x(x-1)}{(1+x^2)^3}$, on obtient :
$$f"(x) = \frac{e^x(x-1)}{(1+x^2)^3}\left((x-1)(1+x^2) + 2(1+x^2) - 4x(x-1)\right).$$

D'où, en développant le dernier facteur :

$$f"(x) = \frac{e^x(x-1)}{(1+x^2)^3}\left(x^3 - 3x^2 + 5x + 1\right).$$

5. Résolvons l'équation $f"(x) = 0$. Comme $\frac{e^x}{(1+x^2)^3} \neq 0$, on en déduit que cette équation est équivalente à

$$x - 1 = 0, \text{ou } x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0.$$

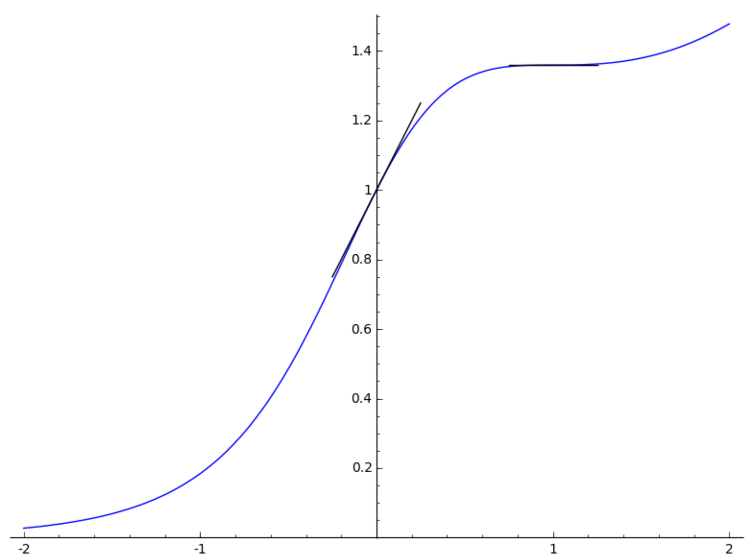
   Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$. Étudions les variations de g. Comme g est un polynôme, on en déduit qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 - 6x + 5$. Donc g' est un polynôme de degré 2 qui a comme discriminant $36 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -24 < 0$. On en déduit que g' est strictement positive. Donc g est strictement croissante. Or les limites en ∞ d'un polynôme dépend uniquement de son terme de plus haut degré qui est ici x^3.
   Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{+\infty} g = +\infty$, $\lim_{-\infty} g = -\infty$. Comme g est un polynôme, elle est en particulier continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit par le théorème de la bijection continue que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g(\alpha) = 0.$$

   On en déduit que $f"$ s'annule en 1 et en α.
6. On a :

$$g(\tfrac{-1}{4}) = \tfrac{-1}{64} - \tfrac{3}{16} + \tfrac{-5}{4} + 1$$
$$= \tfrac{-1}{64} - \tfrac{3}{16} - \tfrac{1}{4} < 0$$

   et $g(0) = 1$. Par stricte croissance et continuité de g sur l'intervalle $[-\frac{1}{4}, 0]$, d'après le théorème de la bijection continue que $\alpha \in]\frac{-1}{4}, 0[$.
7. Représentation du graphe de f :



8. On a : $P_0 = 1$, $P_1 = x^2 - 2x + 1$ et $P_2 = (x-1)(x^3 - 3x^2 + 5x + 1) = x^4 - 4x^3 + 8x - 4x - 1$.
9. Supposons que $\mathcal{A}_n$ est vraie pour un certain n. Montrons que $\mathcal{A}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Cette fonction étant dérivable sur $\mathbb{R}$, en appliquant la formule de dérivation d'un produit, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{e^x P_n'(x)}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{(n+1)2xe^x P_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}}.$$

En factorisant par $\frac{e^x}{(1+x^2)^{n+2}}$, on obtient :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^{n+2}} \left(P_n(x)(1+x^2) + P_n'(x)(1+x^2) - (n+1)2xP_n(x)\right).$$

Par hypothèse, P_n est un polynôme donc sa dérivée est aussi un polynôme. Donc le dernier facteur est bien un polynôme car somme et produit de polynômes. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$P_{n+1}(x) = (x^2 - 2(n+1)x + 1)P_n(x) + (1+x^2)P_n'(x).$$

On en déduit que si $\mathcal{A}_n$ est vraie, alors $\mathcal{A}_{n+1}$ est vraie.

10. Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{A}_n$ est vraie. De plus, on en déduit que la famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se construit ainsi :

$$\begin{array}{rcl} P_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad P_{n+1} & = & (X^2 - 2(n+1)X + 1)P_n + (1+X^2)P_n'. \end{array}$$

11. On traite les questions 11 et 12 dans la même récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n$ la proposition :

P_n est à coefficients entiers, son degré est $2n$ et son coefficient dominant est 1.

Montrons cette proposition par récurrence.

— Pour $n = 0$, on a $P_0 = 1$. Les coefficients sont bien entiers, son degré est 0 et le coefficient dominant de ce polynôme est 1. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain entier n. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. D'après la définition de P_{n+1}, on a :

$$P_{n+1} = (X^2 - 2(n+1)X + 1)P_n + (1+X^2)P_n'.$$

Par hypothèse de récurrence, P_n est à coefficients entiers. Donc P_n' est aussi à coefficients entiers. Ainsi, P_{n+1} est la somme de deux produits de deux polynômes à coefficients entiers. Donc P_{n+1} est à coefficients entiers. D'après l'hypothèse de récurrence, P_n est de degré $2n$ et de coefficient dominant 1. Donc le produit $(X^2 - 2(n+1)X + 1)P_n$ est de degré $2n+2$ et de coefficient dominant 1. De même, $(1+X^2)P_n'$ est de degré au plus $2n+1 < 2n+2$. Donc la somme est de degré $2n+2$ et le coefficient dominant de P_{n+1} est 1. On a montré que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.

— D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est à coefficients entiers, qu'il est de degré $2n$ et que son coefficient dominant est 1.

12. Traité dans la question précédente.

13. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}_n$:

$$P_n(i) = 2^n n!(-i)^n, \text{ où } i^2 + 1 = 0.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ est vraie.

— Pour $n = 0$, on a $P_0(i) = 1$, donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain n. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par définition de P_{n+1}, on a :

$$P_{n+1} = (X^2 - 2(n+1)X + 1)P_n + (1 + X^2)P_n'.$$

comme $i^2 + 1 = 0$, on en déduit que :

$$P_{n+1}(i) = -2(n+1)iP_n(i) + 0.$$

Par hypothèse de récurrence, on a : $P_n(i) = 2^n n!(-i)^n$. Donc :

$$P_{n+1}(i) = 2^{n+1}(n+1)!i^{n+1}.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(i) = 2^n n!(-i)^n$.

Exercice 2. Pour tout entier k et tout entier n vérifiant $0 \leq k \leq n$, on pose :

$$I_k(n) = \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx.$$

1. Montrer que pour $0 \leq k \leq n-1$, $I_{k+1}(n) = I_k(n)$. On pourra effectuer une intégration par parties (en la justifiant), en considérant les fonctions $x \longmapsto x^k$ et $x \longmapsto (1-x)^{n-k}$.
2. En déduire la valeur de $I_k(n)$ pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$.
3. Soit $0 \leq k \leq n$. Calculer $\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$.

Correction

1. Soit $k \in [|0, n-1|]$. les applications $f_1 : x \longmapsto x^k$ et $f_2 : x \longmapsto (1-x)^{n-k}$ étant des polynômes, elles sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$. Une primitive de f_1 est donnée par $F_1 : x \longmapsto \frac{x^{k+1}}{k+1}$ et la dérivée de f_2 est l'application $f_2' : -(n-k)(1-x)^{n-k-1}$. En appliquant une intégration par parties à $I_k(n)$, on obtient :

$$I_k(n) = \binom{n}{k} \left([F_1(x) f_2(x)]_0^1 - \int_0^1 F_1(x) f_2'(x) dx \right).$$

D'où :

$$I_k(n) = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} dx$$

Or, pour $k \in [|0, n-1|]$, on a :

$$\binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!(n-k)}{(n-k)!k!(k+1)} = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \binom{n}{k+1}.$$

D'où :

$$I_k(n) = \binom{n}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} d = I_{k+1}(n).$$

2. On en déduit que $I_k(n)$ est constant pour tout $k \in [|0, n|]$. En particulier, pour tout $k \in [|0, n|]$, on a :

$$I_k(n) = I_n(n) = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

3. Soit $0 \leq k \leq n$. On a :

$$I_k(n) = \frac{1}{n+1}.$$

D'où :

$$\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n+1}.$$

Donc :

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{\binom{n}{k}(n+1)} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}.$$

Exercice 3. L'objectif est de déterminer la nature de la suite définie par :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n \ln(n)} \tag{1}$$

pour tout $n \geq 2$.

1. Écrire une fonction Python qui prend en un argument un entier n et qui renvoie la valeur de S_n. Si $n < 2$, on affiche un message d'erreur et on renvoie la valeur 0.

   On supposera que le logarithme est bien défini et qu'il correspond à la fonction `log`.
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \leq x$.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})$.
5. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \leq \frac{1}{n\ln(n)}$. On pourra utiliser les propriétés du logarithme ainsi que les résultats des deux questions précédentes.
6. En déduire que pour tout $N \geq 2$, on a :

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \leq S_N.$$

7. En déduire la nature de $(S_n)_{n\geq 2}$ et sa limite si elle existe.

Correction

1.
```
def Somme(n) :
    if n<2 :
        print("pas définie")
            return 0
    else :
        S=0
        for j in range(2,n+1) :
            S=S+1/(log(j)*j)
        return S
```

2. Soit $n > 2$. On a : $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n\ln(n)}$. Or, $n > 2$ et $\ln(n) > 0$ pour $n > 2$. Donc $\frac{1}{n\ln(n)}$ est strictement positif. On en déduit que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.
3. Posons pour tout $x \geq 0$, $f(x) = x - \ln(1+x)$. La fonction $f_1 : x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme et est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$. Donc, par composition $\ln \circ f_1$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car il s'agit de la différence de l'identité avec f_1. On a :

$$\forall x \geq 0, f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0.$$

   Donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Or $f(0) = 0$. On en déduit que :

$$\forall x \geq 0, f(x) \geq 0,$$

   autrement dit

$$\forall x \geq 0, x \geq \ln(1+x).$$

4. Soit $n \geq 2$. On a : $\ln(n+1) = \ln(n(1+\frac{1}{n})) = \ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n}$ car $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
5. Soit $n \geq 2$. On a, d'après la question 4,

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n}.$$

   D'après la question 3, on obtient alors :

$$\ln(n+1)) = \ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n}) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}.$$

Par croissance de ln, on a donc :

$$\ln(\ln(n+1)) \leq \ln(\ln(n) + \frac{1}{n})$$

On a :

$$\ln(\ln(n) + \frac{1}{n}) = \ln(\ln(n)(1 + \frac{1}{n\ln(n)}) = \ln(\ln(n)) + \ln(1 + \frac{1}{n\ln(n)}).$$

Donc, en appliquant à nouveau le résultat de la question 3 :

$$\ln(\ln(n) + \frac{1}{n}) = \ln(\ln(n)(1 + \frac{1}{n\ln(n)}) = \ln(\ln(n)) + \ln(1 + \frac{1}{n\ln(n)}) \leq \ln(\ln(n)) + \frac{1}{n\ln(n)}.$$

D'où :

$$\ln(\ln(n) + \frac{1}{n}) - \ln(\ln(n)) \leq \frac{1}{n\ln(n)}.$$

Or $\ln(\ln(n+1)) \leq \ln(\ln(n) + \frac{1}{n})$, donc :

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \leq \frac{1}{n\ln(n)}.$$

6. Soit $N \geq 2$. Pour tout $2 \leq n \leq N$ on a d'après 5 :

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \leq \frac{1}{n\ln(n)}.$$

En sommant pour tout $2 \leq n \leq N$, on obtient, par somme télescopique à gauche et par définition de S_N à droite :

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \leq S_N.$$

7. On sait que la suite (S_n) est croissante. Mais elle n'est pas majorée. En effet, $\ln(N)$ tend vers $+\infty$ lorsque N tend vers $+\infty$. Par composition, on en déduit que $\ln(\ln(N))$ tend vers $+\infty$ lorsque N tend vers $+\infty$. Donc $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme la suite (S_n) est minorée par la suite $(\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)))_{n\geq 2}$ d'après la question 6, on en déduit que la suite S_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle définie par :

$$y'' = \mu y.$$

où y est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer les solutions de cette équation en fonction du paramètre μ.

Correction

Cours.