Devoir surveillé 5 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

Exercice 1. Soit t un réel strictement positif. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $x_0 = t$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

1. (a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g : x \mapsto \sqrt{x} - x$. Étudier le signe de g.
   (b) Montrer que si $t \geq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$. En déduire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   (c) Étudier $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $t < 1$.

   On considère également les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n(x_n - 1), \quad \texttt{et} \quad v_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{u_n}{x_n}.$$

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ en fonction de x_{n+1}. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner un encadrement de L à l'aide de u_n et v_n. En déduire que pour tout réel $t > 0$, on a :
$$1 - \frac{1}{t} \leq L \leq t - 1.$$
   L est un nombre dépendant de la donnée de x_0, c'est-à-dire de t. Nous pouvons alors considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = L$.

   Pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous poserons : $x_n(t) = x_n$; $u_n(t) = u_n$; $v_n(t) = v_n$, pour indiquer que ces réels dépendent aussi de t.
7. Déterminer $f(1)$.
8. Montrer que :
$$\forall t_1 \in \mathbb{R}^{+\star}, \forall t_2 \in \mathbb{R}^{+\star}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n(t_1 t_2) = x_n(t_1)x_n(t_2).$$
9. En déduire :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_n(t_1 t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2)\right).$$
10. Donner une relation entre $f(t_1 t_2)$ et $f(t_1)$ et $f(t_2)$.

Exercice 2. Soient les trois éléments suivants :

$$A = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. A est-elle inversible ? Quelle est son inverse ?
2. Calculer B^2 et en déduire le rang de B.
3. Déterminer également B^{-1} et B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer P^{-1}.
   (b) Calculer $P^{-1}CP$.
   (c) En déduire une expression de C^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ sous la forme
   $$\begin{pmatrix} a_p & b_p \\ c_p & d_p \end{pmatrix}$$
   où a_p, b_p, c_p, d_p sont des nombres complexes en fonction de p que vous expliciterez.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y" + 5y' + 4y = e^{ax} \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. On suppose que $a^2 + 5a + 4 \neq 0$. Trouver une solution particulière de (E). On cherchera une solution sous la forme $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{ax}$.
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 4. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0, I_n(t) = \int_1^t \ln(x)^n dx.$$

1. Calculer $I_0(t)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$I_{n+1}(t) = t \ln(t)^{n+1} - (n+1)I_n.$$
3. Calculer $I_1(t), I_2(t), I_3(t)$.