Devoir surveillé 5 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

Exercice 1. Soit t un réel strictement positif. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $x_0 = t$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

1. (a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g : x \mapsto \sqrt{x} - x$. Étudier le signe de g.
   (b) Montrer que si $t \geq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$. En déduire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   (c) Étudier $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $t < 1$.

   On considère également les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n(x_n - 1), \ \texttt{et} \ v_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{u_n}{x_n}.$$

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ en fonction de x_{n+1}. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner un encadrement de L à l'aide de u_n et v_n. En déduire que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$1 - \frac{1}{t} \leq L \leq t - 1.$$

   L est un nombre dépendant de la donnée de x_0, c'est-à-dire de t. Nous pouvons alors considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = L$.

   Pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous poserons : $x_n(t) = x_n$; $u_n(t) = u_n$; $v_n(t) = v_n$, pour indiquer que ces réels dépendent aussi de t.
7. Déterminer $f(1)$.
8. Montrer que :

$$\forall t_1 \in \mathbb{R}^{+\star}, \forall t_2 \in \mathbb{R}^{+\star}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n(t_1 t_2) = x_n(t_1)x_n(t_2).$$

9. En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_n(t_1 t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2)\right).$$

10. Donner une relation entre $f(t_1 t_2)$ et $f(t_1)$ et $f(t_2)$.

Correction

1. (a) Soit $x \geq 0$. On a :

$$\begin{array}{rlcll} & g(x) & \geq & 0 & \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x}-x & \geq & 0 & \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x}-(\sqrt{x})^2 & \geq & 0 & (x \geq 0) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) & \geq & 0 & \\ \Leftrightarrow & (1-\sqrt{x}) & \geq & 0 & (\sqrt{x} \geq 0) \\ \Leftrightarrow & 1 \geq \sqrt{x} & \geq & 0 & \\ \Leftrightarrow & 1 \geq x & \geq & 0 & \text{(stricte croissance de la fonction racine sur } \mathbb{R}^+) \end{array}$$

Donc, pour tout $x \geq 0$, on a :

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x \geq 0.$$

(b) Soit $t \geq 1$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ par :

$$\mathcal{P}(n) : 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$$

Pour $n = 0$, on a $x_0 = t \geq 1$. Par croissance de la fonction racine, on en déduit que $\sqrt{x_0} \geq 1$. Donc : $x_1 \geq 1$. De plus, pour tout $x \geq 1$ d'après 1a, $g(x) \leq 0$. Donc : $g(x_0) \leq 0$. Autrement dit, $x_1 - x_0 \leq 0$. D'où : $x_1 \leq x_0$. On a bien :

$$1 \leq x_1 \leq x_0.$$

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 0$. On a donc :

$$1 \leq x_{n+1} \leq x_n.$$

Par croissance de la fonction racine carrée, on en déduit à nouveau que :

$$1 \leq \sqrt{x_{n+1}}.$$

Autrement dit :

$$1 \leq x_{n+2}.$$

Comme $x_{n+1} \geq 1$, il en vient, d'après la question 1a que :

$$g(x_{n+1}) \leq 0$$

c'est-à-dire que :

$$x_{n+2} \leq x_{n+1}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq x_{n+1} \leq x_n.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans ce cas décroissante et minorée par 1. Elle est donc convergente. Notons cette limite L. Comme la fonction racine est continue sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de cette fonction. Or :

$$\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 (x \geq 0) \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0.$$

Donc les seules limites possibles pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 0 et 1. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \geq 1$. Donc $L \geq 1$, ce qui exclut 0 comme limite possible. Par conséquent, $L = 1$.

(c) On a : $0 < t < 1$. Dans ce cas, on a :

$$g(x_0) \geq 0.$$

Donc :

$$x_1 \geq x_0.$$

Montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par :

$$\mathcal{P}(n) : 0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq 1.$$

Pour $n = 0$, on a montré que $x_0 \geq x_1$. Comme $0 \leq x_0 \leq 1$, par croissance de la fonction racine, on en déduit que $0 \leq x_1 \leq 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain n. Ce qui signifie :

$$0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq 1.$$

Par croissance de la fonction racine, on en déduit que :

$$0 \leq \sqrt{x_{n+1}} \leq 1.$$

C'est-à-dire :

$$0 \leq x_{n+2} \leq 1.$$

Comme $0 \leq x_{n+1} \leq 1$, on en déduit que $g(x_{n+1}) \geq 0$. Autrement dit :

$$x_{n+2} \geq x_{n+1}.$$

On a donc :

$$0 \leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq 1.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite L qui vérifie $x_0 \leq L \leq 1$. Or les seules limites possibles sont 0 et 1, et comme $0 < x_0$, on en déduit que $L = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) - 2^n(x_n - 1) \\ & = & 2^n(2x_{n+1} - 2 - (x_n - 1)) \\ & = & 2^n(2x_{n+1} - 1 - x_{n+1}^2) \ (x_n \geq 0) \\ & = & -2^n(1 - x_{n+1})^2 \leq 0 \end{array}$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} - v_n & = & 2^{n+1}(1 - \frac{1}{x_{n+1}}) - 2^n(1 - \frac{1}{x_n}) \\ & = & 2^n(2 - \frac{2}{x_{n+1}} - (1 - \frac{1}{x_n})) \\ & = & 2^n(-\frac{2}{x_{n+1}} + 1 + \frac{1}{x_{n+1}^2}) \ (x_n > 0) \\ & = & 2^n(1 - \frac{1}{x_{n+1}})^2 \geq 0 \end{array}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u_n - v_n & = & u_n - \frac{u_n}{x_n} \\ & = & u_n(1 - \frac{1}{x_n}) \\ & = & u_n \frac{x_n - 1}{x_n} \\ & = & 2^n \frac{(x_n-1)^2}{x_n} \geq 0 \end{array}$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n.$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} u_0 \geq v_n.$$

De même, par croissance de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par v_0. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée par v_0 on en déduit qu'elle est convergente. De même, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée par u_0, on en déduit qu'elle est convergente.

5. Notons L la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L' la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{x_n}.$$

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1 \neq 0$, on en déduit, par quotient de suites convergentes que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\frac{L}{1} = L$. Mais $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers L'. Par unicité de la limite, on en déduit que $L' = L$.

6. Grâce aux monotonies des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq L \leq u_n.$$

En particulier :

$$v_0 \leq L \leq u_0.$$

D'où :

$$1 - \frac{1}{t} \leq L \leq t - 1.$$

7. Pour $t = 1$, on constate que la suite $(x_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ est dans ce cas la suite constante 1. En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n = 0.$$

Donc : $f(1) = 0$.

8. Soient $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons :

$$\mathcal{P}(n) : x_n(t_1 t_2) = x_n(t_1) x_n(t_2).$$

Pour $n = 0$, on a :

$$x_0(t_1 t_2) = t_1 t_2 = x_0(t_1) x_0(t_2).$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain n.

Autrement dit :

$$x_n(t_1 t_2) = x_n(t_1) x_n(t_2).$$

Donc :

$$\sqrt{x_n(t_1 t_2)} = \sqrt{x_n(t_1) x_n(t_2)}$$

Or, $x_n(t_1) \geq 0$ et $x_n(t_2) \geq 0$. D'où :

$$\sqrt{x_n(t_1)x_n(t_2)} = \sqrt{x_n(t_1)}\sqrt{x_n(t_2)} = x_{n+1}(t_1)x_{n+1}(t_2).$$

On a bien :

$$x_{n+1}(t_1t_2) = x_{n+1}(t_1)x_{n+1}(t_2).$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} u_n(t_1t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2) & = & 2^n(x_n(t_1t_2) - 1) - 2^n(x_n(t_1) - 1) - 2^n(x_n(t_2) - 1) & \\ & = & 2^n(x_n(t_1t_2) - 1 - x_n(t_1) + 1 - x_n(t_2) + 1) & \\ & = & 2^n(x_n(t_1)x_n(t_2) - x_n(t_1) - x_n(t_2) + 1) & \text{(question 8)} \\ & = & 2^n(x_n(t_1) - 1)(x_n(t_2) - 1) & \\ & = & u_n(t_1)(x_n(t_2) - 1) & \end{array}$$

Or $(u_n(t_1))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente donc est bornée et $(x_n(t_2))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n(t_2) - 1 = 0.$$

Par produit d'une suite bornée avec une suite de limite nulle, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(t_1t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2) = 0.$$

10. On sait que :

$$\forall t > 0, \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = f(t).$$

Soient $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$. Comme les suites $(u_n(t_1t_2))_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n(t_1))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n(t_2))_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes trois convergentes, on en déduit par combinaison linéaire que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(t_1t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2) = f(t_1t_2) - f(t_1) - f(t_2).$$

Or, d'après 9, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(t_1t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2) = 0.$$

Donc :

$$0 = f(t_1t_2) - f(t_1) - f(t_2).$$

Autrement dit :

$$f(t_1t_2) = f(t_1) + f(t_2).$$

Exercice 2. Soient les trois éléments suivants :

$$A = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. A est-elle inversible ? Quelle est son inverse ?
2. Calculer B^2 et en déduire le rang de B.
3. Déterminer également B^{-1} et B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer P^{-1}.

(b) Calculer $P^{-1}CP$.

(c) En déduire une expression de C^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_p & b_p \\ c_p & d_p \end{pmatrix}$$

où a_p, b_p, c_p, d_p sont des nombres complexes en fonction de p que vous expliciterez.

Correction

1. Calculons $\det(A)$. On a : $\det(A) = -i \neq 0$. Donc A est bien inversible. A étant une matrice carrée de taille 2×2, l'inverse est donnée par :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

2. On a :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc B est inversible. On en déduit que B est de rang 2. On peut aussi constater qu'en échangeant les deux lignes de B, on retrouve une matrice échelonnée ayant un nombre de pivots égal à 2.

3. On constate que $B^2 = I_2$. Donc : $B^{-1} = B$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{array}{ll} B^n = B, & \text{si } n \text{ est impair} \\ B^n = I_2 & \text{sinon.} \end{array}$$

4. (a) On constate que $\det(P) = -2i \neq 0$. Donc P est bien inversible. De plus, P étant une matrice 2×2, on a :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

(b) On a :

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} = \Delta$$

(c) On a donc, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$P^{-1}C^pP = \begin{pmatrix} (1+i)^p & 0 \\ 0 & (1-i)^p \end{pmatrix} = \Delta^p$$

D'où :

$$C^p = P\Delta^p P^{-1}.$$

Donc, en passant aux formes exponentielles :

$$C^p = P \begin{pmatrix} \sqrt{2}^p e^{\frac{ip\pi}{4}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}^p e^{\frac{-ip\pi}{4}} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

D'où :

$$C^p = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^p \cos(\frac{p\pi}{4}) & \sqrt{2}^p \sin(\frac{p\pi}{4}) \\ -\sqrt{2}^p \sin(\frac{p\pi}{4}) & \sqrt{2}^p \cos(\frac{p\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Exercice 3. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y" + 5y' + 4y = e^{ax} \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. On suppose que $a^2 + 5a + 4 \neq 0$. Trouver une solution particulière de (E). On cherchera une solution sous la forme $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{ax}$.
3. En déduire les solutions de (E).

Correction

1. On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation homogène associée à (E) est :
$$y" + 5y' + 4y = 0, \tag{H}$$
qui a comme équation caractéristique :
$$r^2 + 5r + 4 = 0.$$
On constate alors que -1 est racine évidente, et en regardant le terme constant, que l'autre racine est -4. Les solutions de (H) sont donc de la forme :
$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & Ae^{-x} + Be^{-4x}, \end{array}$$
avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
2. Comme $a^2 + 5a + 4 \neq 0$, on peut considérer la fonction f_p définie par :
$$\begin{array}{rccl} f_p : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{a^2+5a+4}e^{ax}, \end{array}$$
qui est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une exponentielle par une constante. Calculons f_p' et f_p". On a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_p'(x) = \frac{a}{a^2 + 5a + 4}e^{ax}, f_p"(x) = \frac{a^2}{a^2 + 5a + 4}e^{ax}.$$
Donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_p"(x) + 5f_p'(x) + 4f_p(x) = \frac{a^2 + 5a + 4}{a^2 + 5a + 4}e^{ax} = e^{ax}.$$
Donc f_p vérifie l'équation (E).
3. L'équation différentielle étant linéaire, on sait que les solutions sont exactement obtenues en ajoutant à une solution particulière une solution de l'équation homogène correspondante. Autrement dit, les solutions sont de la forme :
$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & Ae^{-x} + Be^{-4x} + \frac{1}{a^2+5a+4}e^{ax}, \end{array}$$
où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0, I_n(t) = \int_1^t \ln(x)^n dx.$$

1. Calculer $I_0(t)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1}(t) = t\ln(t)^{n+1} - (n+1)I_n.$$

3. Calculer $I_1(t), I_2(t), I_3(t)$.

Correction

1. Pour $n = 0$, on a :

$$I_0(t) = \int_1^t dx = t - 1.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_{n+1}(t) = \int_1^t \ln(x)^{n+1} dx.$$

La fonction $f : x \longmapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, t]$. La fonction $g_1 : x \longmapsto x^{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme polynôme. Comme $t > 0$, on en déduit que la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[1; t]$. Par composition, la fonction $g = g_1 \circ \ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; t]$. On peut donc appliquer la formule d'intégration par parties pour les fonctions f et g. On a :

$$\forall x \in [1, t], \quad \begin{array}{ll} f(x) = x, & f'(x) = 1 \\ g(x) = \ln(x)^{n+1} & g'(x) = \frac{(n+1)}{x}\ln(x)^n \end{array}$$

Donc :

$$\int_1^t \ln(x)^{n+1} dx = \int_1^t f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{x=1}^{x=t} - \int_1^t f(x)g'(x)dx.$$

D'où :

$$I_{n+1}(t) = t\ln(t)^{n+1} - (n+1)\int_1^t \ln(x)^n dx.$$

Autrement dit :

$$I_{n+1}(t) = t\ln(t)^{n+1} - (n+1)I_n(t).$$

3. En utilisant la relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}, on a :

$$I_1(t) = t\ln(t) - I_0(t) = t\ln(t) - t + 1$$

On en déduit, pour $I_2(t)$:

$$I_2(t) = t\ln(t)^2 - 2t\ln(t) + 2t - 2$$

Et pour $I_3(t)$:

$$I_3(t) = t\ln(t)^3 - 3t\ln(t)^2 + 6t\ln(t) - 6t + 6.$$