Devoir surveillé 6 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

---

1 Problème

L'objectif du problème est l'étude d'une promenade aléatoire (partie III). Dans les parties I et II, on établira des résultats qui seront utilisés dans la partie III.

Partie I

Soient y_1, y_2, y_3, y_4 des nombres réels. On considère l'équation matriciel :

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \tag{E}$$

où x_1, x_2, x_3, x_4 sont des inconnues réels.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur y_1, y_2, y_3, y_4 pour que cette équation admette une solution. On pourra considérer l'opération élémentaire $L_4 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ et observer que le système est échelonné en permutant des lignes et des variables.
2. On suppose que cette condition est satisfaite. Déterminer l'ensemble des solutions du système. On exprimera les solutions en fonction de y_2, y_3, y_4 et de t où t est un paramètre réel correspondant à x_1.
3. On suppose que cette condition est satisfaite. Soit a un nombre réel. Exprimer en fonction de y_2, y_3, y_4 l'unique (x_1, x_2, x_3, x_4) solution vérifiant la relation :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a.$$

Partie II

On considère une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+4} = \frac{1}{4}\left(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n\right). \tag{1}$$

On lui associe les deux suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_n = \min(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}), M_n = \max(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}).$$

Par définition, m_n et M_n sont respectivement le plus petit et le plus grand des nombres réels parmi $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$.

1. Dans cette question, on établit les convergences des suites (m_n) et (M_n).
   (a) Montrer que m_n est inférieur ou égal aux nombres $p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}$. En déduire que la suite (m_n) est croissante. Établir de même que la suite (M_n) est décroissante.
   (b) Prouver que, pour tout entier naturel n :
   $$m_0 \leq m_n \leq p_n \leq M_n \leq M_0$$
   (c) Prouver que les suites (m_n) et (M_n) sont convergentes, et que leurs limites respectives, notées m et M, vérifient :
   $$m \leq M$$
2. Dans cette question, on établit la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$p_{n+4} \leq \tfrac{3}{4}M_n + \tfrac{1}{4}m_n$$
   $$p_{n+4} \leq \tfrac{3}{4}M_n + \tfrac{1}{4}m$$
   En appliquant la dernière inégalité à $p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}$, montrer que :
   $$M_{n+4} \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m$$
   (b) En déduire que $M \leq m$ puis que $M = m$.
   (c) En déduire que (p_n) est convergente et exprimer sa limite en fonction de M.

Partie III

Dans cette partie, on étudie la promenade aléatoire d'un jeton sur les quatre cases C_1, C_2, C_3, C_4 suivantes :

C_1	C_2	C_3	C_4

Au cours des instants successifs 0, 1, 2,$\cdots$, n on y déplace un jeton de la manière suivante :
- à l'instant 0, le jeton est placé en C_1.
- Si à l'instant n le jeton est placé en C_1, on le place à l'instant $n+1$ sur l'une des cases C_1, C_2, C_3, C_4, le choix se faisant de manière équiprobable et indépendamment des positions du jeton aux instants antérieurs.
- Si à l'instant n, le jeton est placé en C_i où $2 \leq i \leq 4$, on le place à l'instant $n+1$ sur la case C_{i-1}.

On pose $A(n,i)$ l'événement "le jeton se retrouve sur la case C_i à l'instant n", $q(n,i)$ la probabilité de $A(n,i)$ et :
$$Q_n = \begin{pmatrix} q(n,1) \\ q(n,2) \\ q(n,3) \\ q(n,4) \end{pmatrix}$$
On étudie les suites $(q(n,i))_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $1 \leq i \leq 4$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$Q_{n+1} = AQ_n,$$
   avec :
   $$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En déduire les relations suivantes :
$$\left\{\begin{array}{lcl} q(n+1,4) & = & \frac{1}{4}q(n,1) \\ q(n+2,3) & = & \frac{1}{4}[q(n,1)+q(n+1,1)] \\ q(n+3,2) & = & \frac{1}{4}[q(n,1)+q(n+1,1)+q(n+2,1)] \\ q(n+4,1) & = & \frac{1}{4}[q(n,1)+q(n+1,1)+q(n+2,1)+q(n+3,1)] \end{array}\right.$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, Q_n = A^n Q_0$.
4. Calculer A^2, A^3.
5. En déduire $q(0,1), q(1,1), q(2,1), q(3,1)$.
6. En faisant le lien avec la partie II, montrer que la suite $(q(n,1))$ est convergente. En déduire que les suites $(q(n,i))$ pour $2 \leq i \leq 4$ sont convergentes. Exprimer les limites de $(q(n,i))$ pour $2 \leq i \leq 4$ en fonction de L, la limite de $(q(n,1))$.
7. Calculer $q(n,1)+q(n,2)+q(n,3)+q(n,4)$. En déduire les limites des quatre suites $(q(n,i))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $i = 1,2,3,4$.
8. On pose :
$$E_n = \begin{pmatrix} E_n^{(1)} \\ E_n^{(2)} \\ E_n^{(3)} \\ E_n^{(4)} \end{pmatrix}$$
où $E_n^{(i)}$ est le nombre moyen de passages du jeton sur la case C_i après l'instant n. **On admet** que :
$$E_n = Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_n.$$
et que :
$$E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + E_n^{(3)} + E_n^{(4)} = n+1$$
   (a) Montrer que :
$$(A - I_4)E_n = Q_{n+1} - Q_0.$$
   (b) À l'aide de la partie I, exprimer $E_n^{(i)}$ en fonction de $q(n+1,j)$ où $j \in \{2,3,4\}$.
   (c) Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, expliciter des nombres réels f_i, g_i tels que :
$$E_n^{(i)} = f_i n + g_i + \epsilon_i(n),$$
   où $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_i(n) = 0$.

2 Exercice

Dans les exercices qui suivent, les justifications ne sont pas demandées, on donnera directement le résultat.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

1. $\frac{3x^2-5x}{x^2+5x}$ (en 0), 2. $\frac{|2x-2|-x}{2x-4}$ (en 2) 3. $\sqrt{x^2+4x+12} - x + 2$ (en $+\infty$).

Exercice 2. On dispose de deux dés, un bleu et un rouge. On note a la face apparente du dé bleu et b celle du dé rouge. On considère E l'équation
$$x^2 - 2ax + b^2 = 0$$
Déterminer la probabilité que cette équation ait :

1. une racine double, 2. une racine double paire, 3. pas de racine réelle.