Devoir surveillé 6 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

---

1 Problème

L'objectif du problème est l'étude d'une promenade aléatoire (partie III). Dans les parties I et II, on établira des résultats qui seront utilisés dans la partie III.

Partie I

Soient y_1, y_2, y_3, y_4 des nombres réels. On considère l'équation matriciel :

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \tag{E}$$

où x_1, x_2, x_3, x_4 sont des inconnues réels.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur y_1, y_2, y_3, y_4 pour que cette équation admette une solution. On pourra considérer l'opération élémentaire $L_4 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ et observer que le système est échelonné en permutant des lignes et des variables.
2. On suppose que cette condition est satisfaite. Déterminer l'ensemble des solutions du système. On exprimera les solutions en fonction de y_2, y_3, y_4 et de t où t est un paramètre réel correspondant à x_1.
3. On suppose que cette condition est satisfaite. Soit a un nombre réel. Exprimer en fonction de y_2, y_3, y_4 l'unique (x_1, x_2, x_3, x_4) solution vérifiant la relation :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a.$$

Correction

1. Traduisons l'équation matricielle en système :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} -\frac{3}{4}x_1 & +x_2 & & & = & y_1 \\ \frac{1}{4}x_1 & -x_2 & +x_3 & & = & y_2 \\ \frac{1}{4}x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & y_3 \\ \frac{1}{4}x_1 & & & -x_4 & = & y_4 \end{array} \right.$$

En effectuant $L_4 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{llllll} -\frac{3}{4}x_1 & +x_2 & & & = & y_1 \\ \frac{1}{4}x_1 & -x_2 & +x_3 & & = & y_2 \\ \frac{1}{4}x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & y_3 \\ & & & 0 & = & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \end{array} \right.$$

On constate alors, en ordonnant les lignes de la manière suivante L_3, L_2, L_1, L_4 et les variables dans l'ordre x_4, x_3, x_2, x_1, que le système est échelonné et a 3 pivots. Le système est donc de rang 3. Il a donc des solutions si et seulement si $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$.

2. Résolvons (E). On sait que (E) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} -\frac{3}{4}x_1 & +x_2 & & & = & y_1 \\ \frac{1}{4}x_1 & -x_2 & +x_3 & & = & y_2 \\ \frac{1}{4}x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & y_3 \\ & & & 0 & = & y_1+y_2+y_3+y_4 \end{array}\right.$$

On sait que la dernière ligne du système est vérifiée. Donc le système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{llllll} -\frac{3}{4}x_1 & +x_2 & & & = & y_1 \\ \frac{1}{4}x_1 & -x_2 & +x_3 & & = & y_2 \\ \frac{1}{4}x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & y_3 \end{array}\right.$$

On a alors le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_2 & & & = & y_1 + \frac{3}{4}x_1 \\ & x_3 & & = & y_2 + x_2 - \frac{1}{4}x_1 \\ & & x_4 & = & y_3 + x_3 - \frac{1}{4}x_1 \end{array}\right.$$

En substituant :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_2 & & & = & y_1 + \frac{3}{4}x_1 \\ & x_3 & & = & y_2 + y_1 + \frac{1}{2}x_1 \\ & & x_4 & = & y_3 + y_1 + y_2 + \frac{1}{4}x_1 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$S = \{(t, y_1 + \frac{3}{4}t, y_1 + y_2 + \frac{1}{2}t, y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{4}t), t \in \mathbb{R}\}.$$

À l'aide de la relation $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$, on en déduit que :

$$S = \{(t, -y_2 - y_3 - y_4 + \frac{3}{4}t, -y_3 - y_4 + \frac{1}{2}t, -y_4 + \frac{1}{4}t), t \in \mathbb{R}\}.$$

3. Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$ vérifiant la relation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$. Le t vérifie alors :

$$-y_2 - 2y_3 - 3y_4 + \frac{10}{4}t = a.$$

D'où :

$$t = \frac{4}{10}(a + y_2 + 2y_3 + 3y_4)$$

Donc :

$$t = \frac{2}{5}(a + y_2 + 2y_3 + 3y_4)$$

D'où, en substituant et en simplifiant :

$$\begin{array}{lll} x_1 & = & \frac{2}{5}a + \frac{2}{5}y_2 + \frac{4}{5}y_3 + \frac{6}{5}y_4, \\ x_2 & = & \frac{3}{10}a - \frac{7}{10}y_2 - \frac{2}{5}y_3 - \frac{1}{10}y_4 \\ x_3 & = & \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}y_2 - \frac{3}{5}y_3 - \frac{2}{5}y_4 \\ x_4 & = & \frac{1}{10}a + \frac{1}{10}y_2 + \frac{1}{5}y_3 - \frac{7}{10}y_4 \end{array}$$

La solution du système est donc (x_1, x_2, x_3, x_4) où les x_i sont données par les formules précédentes.

Partie II

On considère une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+4} = \frac{1}{4}\left(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n\right). \tag{1}$$

On lui associe les deux suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_n = \min(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}), M_n = \max(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}).$$

Par définition, m_n et M_n sont respectivement le plus petit et le plus grand des nombres réels parmi $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$.

1. Dans cette question, on établit les convergences des suites (m_n) et (M_n).
   (a) Montrer que m_n est inférieur ou égal aux nombres $p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}$. En déduire que la suite (m_n) est croissante. Établir de même que la suite (M_n) est décroissante.
   (b) Prouver que, pour tout entier naturel n :
   $$m_0 \leq m_n \leq p_n \leq M_n \leq M_0$$
   (c) Prouver que les suites (m_n) et (M_n) sont convergentes, et que leurs limites respectives, notées m et M, vérifient :
   $$m \leq M$$
2. Dans cette question, on établit la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$\begin{aligned} p_{n+4} &\leq \tfrac{3}{4}M_n + \tfrac{1}{4}m_n \\ p_{n+4} &\leq \tfrac{3}{4}M_n + \tfrac{1}{4}m \end{aligned}$$
   En appliquant la dernière inégalité à $p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}$, montrer que :
   $$M_{n+4} \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m$$
   (b) En déduire que $M \leq m$ puis que $M = m$.
   (c) En déduire que (p_n) est convergente et exprimer sa limite en fonction de M.

Correction

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de m_n, on a : $m_n \leq p_i$ pour $i \in \{n, n+1, n+2, n+3\}$, en particulier pour $i \in \{n+1, n+2, n+3\}$. Comme $m_n \leq p_i$ pour $i \in \{n, n+1, n+2, n+3\}$, en sommant, on a :
   $$4m_n \leq p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3}.$$
   D'où :
   $$m_n \leq \frac{1}{4}(p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3})$$
   Par définition, $p_{n+4} = \frac{1}{4}(p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3})$. Donc :
   $$m_n \leq p_{n+4}.$$
   Donc :
   $$\forall i \in \{n+1, n+2, n+3, n+4\}, m_n \leq p_i.$$

Par conséquent,
$$m_n \leq \min(p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}) = m_{n+1}.$$
On en déduit que la suite (m_n) est croissante. De la même manière, par définition de M_n, on a :
$$M_n \geq p_{n+3}, M_n \geq p_{n+2}, M_n \geq p_{n+1}, M_n \geq p_n.$$
En sommant :
$$4M_n \geq p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3}.$$
Donc :
$$M_n \geq \frac{1}{4}(p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3}) = p_{n+4}.$$
Donc :
$$M_n \geq \max(p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}) = M_{n+1}$$
Donc la suite (M_n) est décroissante.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de (m_n), on sait que :
$$m_0 \leq m_n$$
De même, par décroissance de (M_n), on sait que :
$$M_n \leq M_0.$$
m_n étant le minimum de $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$, on sait que $m_n \leq p_n$. De même, M_n étant le maximum de $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$, on sait que $M_n \geq p_n$.
Par transitivité des inégalité, on a :
$$m_0 \leq m_n \leq p_n \leq M_n \leq M_0.$$

(c) La suite (m_n) est donc croissante et majorée par M_0 elle est donc convergente vers une limite que l'on note m. De même, la suite (M_n) est décroissante et minorée par m_0 elle est donc convergente vers une limite que l'on note M. D'après la question 1.b, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$m_n \leq M_n.$$
ces suites étant convergente, par passage à la limite, on obtient :
$$m \leq M.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de p_{n+4}, on a :
$$p_{n+4} = \frac{1}{4}(p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3}).$$
Parmi $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$, on sait que l'un d'entre eux est égal à m_n. De plus, les trois autres sont majorés par M_n. Donc :
$$p_{n+4} \leq \frac{1}{4}(3M_n + m_n).$$
D'où :
$$p_{n+4} \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m_n.$$
La suite (m_n) convergeant en croissant vers m, on a $m_n \leq m$. D'où :
$$p_{n+4} \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m$$

De même, on a :

$$\begin{array}{rcl} p_{n+5} & \leq & \frac{3}{4}M_{n+1} + \frac{1}{4}m \\ p_{n+6} & \leq & \frac{3}{4}M_{n+2} + \frac{1}{4}m \\ p_{n+7} & \leq & \frac{3}{4}M_{n+3} + \frac{1}{4}m \end{array}$$

Par décroissance de la suite (M_n), on en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} p_{n+5} & \leq & \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m \\ p_{n+6} & \leq & \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m \\ p_{n+7} & \leq & \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m \end{array}$$

Donc :

$$\max(p_{n+4}, p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}) \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m$$

D'où :

$$M_{n+4} \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

Ces suites étant convergentes, on obtient en passant à la limite :

$$M \leq \frac{3}{4}M + \frac{1}{4}m.$$

Donc :

$$M \leq m.$$

Comme on avait : $M \geq m$ (question 1.c), on en déduit que $M = m$.

3. D'après la question 1.b, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$m_n \leq p_n \leq M_n$$

De plus, on sait que les suites (m_n) et (M_n) sont convergentes et vers la même limite M. Par encadrement, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} p_n = M$.

Partie III

Dans cette partie, on étudie la promenade aléatoire d'un jeton sur les quatre cases C_1, C_2, C_3, C_4 suivantes :

C_1	C_2	C_3	C_4

Au cours des instants successifs 0, 1, 2,$\cdots$, n on y déplace un jeton de la manière suivante :

— à l'instant 0, le jeton est placé en C_1.

— Si à l'instant n le jeton est placé en C_1, on le place à l'instant $n+1$ sur l'une des cases C_1, C_2, C_3, C_4, le choix se faisant de manière équiprobable et indépendamment des positions du jeton aux instants antérieurs.

— Si à l'instant n, le jeton est placé en C_i où $2 \leq i \leq 4$, on le place à l'instant $n+1$ sur la case C_{i-1}.

On pose $A(n, i)$ l'événement “le jeton se retrouve sur la case C_i à l'instant n”, $q(n, i)$ la probabilité de $A(n, i)$ et :

$$Q_n = \begin{pmatrix} q(n,1) \\ q(n,2) \\ q(n,3) \\ q(n,4) \end{pmatrix}$$

On étudie les suites $(q(n, i))_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $1 \leq i \leq 4$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$Q_{n+1} = AQ_n,$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En déduire les relations suivantes :

$$\begin{cases} q(n+1,4) & = & \frac{1}{4}q(n,1) \\ q(n+2,3) & = & \frac{1}{4}[q(n,1)+q(n+1,1)] \\ q(n+3,2) & = & \frac{1}{4}[q(n,1)+q(n+1,1)+q(n+2,1)] \\ q(n+4,1) & = & \frac{1}{4}[q(n,1)+q(n+1,1)+q(n+2,1)+q(n+3,1)] \end{cases}$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, Q_n = A^n Q_0$.
4. Calculer A^2, A^3.
5. En déduire $q(0,1), q(1,1), q(2,1), q(3,1)$.
6. En faisant le lien avec la partie II, montrer que la suite $(q(n,1))$ est convergente. En déduire que les suites $(q(n,i))$ pour $2 \leq i \leq 4$ sont convergentes. Exprimer les limites de $(q(n,i))$ pour $2 \leq i \leq 4$ en fonction de L, la limite de $(q(n,1))$.
7. Calculer $q(n,1)+q(n,2)+q(n,3)+q(n,4)$. En déduire les limites des quatre suites $(q(n,i))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $i = 1,2,3,4$.
8. On pose :

$$E_n = \begin{pmatrix} E_n^{(1)} \\ E_n^{(2)} \\ E_n^{(3)} \\ E_n^{(4)} \end{pmatrix}$$

où $E_n^{(i)}$ est le nombre moyen de passages du jeton sur la case C_i après l'instant n. **On admet** que :

$$E_n = Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_n.$$

et que :

$$E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + E_n^{(3)} + E_n^{(4)} = n+1$$

(a) Montrer que :

$$(A - I_4)E_n = Q_{n+1} - Q_0.$$

(b) À l'aide de la partie I, exprimer $E_n^{(i)}$ en fonction de $q(n+1,j)$ où $j \in \{2,3,4\}$.

(c) Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, expliciter des nombres réels f_i, g_i tels que :

$$E_n^{(i)} = f_i n + g_i + \epsilon_i(n),$$

où $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_i(n) = 0$.

Correction

1. Considérons le système complet d'événements : la famille $(B_i)_{1\leq i\leq 4}$ $B_i =$"le jeton à l'instant n est en position i. On a :

$$\begin{aligned} P(A(n+1,i)) &= P(A(n+1,i)\cap B_1) + P(A(n+1,i)\cap B_2) \\ &\quad + P(A(n+1,i)\cap B_3) + P(A(n+1,i)\cap B_4) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(A(n+1,i)) &= P(A(n+1,i)|B_1)P(B_1) + P(A(n+1,i)|B_2)P(B_2) \\ &\quad + P(A(n+1,i)|B_3)P(B_3) + P(A(n+1,i)|B_4)P(B_4) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} q(n+1,i) &= P(A(n+1,i)|B_1)q(n,1) + P(A(n+1,i)|B_2)q(n,2) \\ &\quad + P(A(n+1,i)|B_3)q(n,3) + P(A(n+1,i)|B_4)q(n,4) \end{aligned}$$

D'après les hypothèses, on a donc :

$$\begin{array}{rclllll} q(n+1,1) & = & \frac{1}{4}q(n,1) & +q(n,2) & & \\ q(n+1,2) & = & \frac{1}{4}q(n,1) & & +q(n,3) & \\ q(n+1,3) & = & \frac{1}{4}q(n,1) & & & +q(n,4) \\ q(n+1,4) & = & \frac{1}{4}q(n,1) & & & \end{array}$$

D'où :

$$Q_{n+1} = AQ_n,$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On a donc :

$$q(n+1,4) = \frac{1}{4}q(n,1).$$

D'après les relations de la matrice, on a :

$$q(n+2,3) = \frac{1}{4}q(n+1,1) + q(n+1,4)$$

d'où en utilisant $(q(n+1,4) = \frac{1}{4}q(n,1)$:

$$q(n+2,3) = \frac{1}{4}q(n+1,1) + \frac{1}{4}q(n,1) = \frac{1}{4}(q(n+1,1) + q(n,1)).$$

On a aussi :

$$q(n+3,2) = \frac{1}{4}q(n+2,1) + q(n+2,3)$$

D'où, à l'aide de l'égalité $q(n+2,3) = \frac{1}{4}q(n+1,1) + \frac{1}{4}q(n,1) = \frac{1}{4}(q(n+1,1) + q(n,1))$:

$$q(n+3,2) = \frac{1}{4}q(n+2,1) + \frac{1}{4}(q(n+1,1) + q(n,1)) = \frac{1}{4}\left(q(n+2,1) + q(n+1,1) + q(n,1)\right)$$

Enfin, en utilisant la précédente égalité :

$$q(n+4,1) = \frac{1}{4}q(n+3,1) + q(n+3,2) = \frac{1}{4}q(n+3,1) + \frac{1}{4}(q(n+2,1) + q(n+1,1) + q(n,1))$$

D'où :

$$q(n+4,1) = \frac{1}{4}\left(q(n+3,1) + q(n+2,1) + q(n+1,1) + q(n,1)\right).$$

3. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $Q_{n+1} = AQ_n$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = A^n Q_0$. Pour $n = 0$, on a : $A^0 Q_0 = I_4 Q_0 = Q_0$. Donc la propriété est vraie au rang 0. On suppose qu'elle est vraie pour un certain n fixé. On a alors :

$$Q_n = A^n Q_0.$$

Or, $Q_{n+1} = AQ_n$. Donc, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$Q_{n+1} = AA^n Q_0 = A^{n+1} Q_0.$$

Donc la propriété est vérifiée au rang $n+1$. On en déduit, d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = A^n Q_0.$$

4. On a :

$$A^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 16 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 16 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$A^3 = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 25 & 20 & 16 & 64 \\ 25 & 20 & 16 & 0 \\ 9 & 20 & 16 & 0 \\ 5 & 4 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Il en résulte que :

$$q(1,1) = \frac{1}{4}, q(2,1) = \frac{5}{16}, q(3,1) = \frac{25}{64}.$$

6. On constate que la suite $(q(n,1))$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$q(n+4,1) = \frac{1}{4}(q(n+3,1) + q(n+2,1) + q(n+1,1) + q(n,1)).$$

Donc d'après la partie II, on en déduit que cette suite est convergente, notons sa limite L. En utilisant les relations de la question 2, et en passant à la limite, à gauche, on en déduit que les suites $(q(n,i))_{n\geq 4}$ sont toutes convergentes et :

$$\lim_{n\to+\infty} q(n,4) = \tfrac{1}{4}L$$

$$\lim_{n\to+\infty} q(n,3) = \tfrac{1}{2}L$$

$$\lim_{n\to+\infty} q(n,2) = \tfrac{3}{4}L$$

7. On sait aussi, comme $(A(n,i))_{1\leq i\leq 4}$ forme un système complet d'événements, on a :

$$q(n,1) + q(n,2) + q(n,3) + q(n,4) = 1.$$

Donc, en passant à la limite :

$$\frac{10}{4}L = 1$$

Donc :

$$L = \frac{2}{5}.$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} q(n,4) = \tfrac{1}{10}$$

$$\lim_{n\to+\infty} q(n,3) = \tfrac{1}{5}$$

$$\lim_{n\to+\infty} q(n,2) = \tfrac{3}{10}$$

$$\lim_{n\to+\infty} q(n,1) = \tfrac{2}{5}$$

8. (a) On a :

$$(A-I_4)E_n = (A-I_4)(\sum_{k=0}^{n} Q_k)$$

Donc :

$$(A-I_4)E_n = \sum_{k=0}^{n}(AQ_k - Q_k) = \sum_{k=0}^{n}(Q_{k+1} - Q_k)$$

Par somme télescopique, on retrouve :

$$(A-I_4)E_n = Q_{n+1} - Q_0.$$

(b) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$q(n,1) + q(n,2) + q(n,3) + q(n,4) = 1$$

En posant :

$$\forall i \in \{1,2,3,4\} y_i = q(n+1,i) - q(0,i)$$

on a : $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$. De plus, on constate que $A - I_4$ est la matrice de la partie I. On a aussi $E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + E_n^{(3)} E_n^{(4)} = n+1$. Donc, en remplaçant a par $n+1$, on obtient, d'après la partie I :

$$\begin{aligned}
E_n^{(1)} &= \tfrac{2}{5}(n+1) + \tfrac{2}{5}q(n+1,2) + \tfrac{4}{5}q(n+1,3) + \tfrac{6}{5}q(n+1,4), \\
E_n^{(2)} &= \tfrac{3}{10}(n+1) - \tfrac{7}{10}q(n+1,2) - \tfrac{2}{5}q(n+1,3) - \tfrac{1}{10}q(n+1,4) \\
E_n^{(3)} &= \tfrac{1}{5}(n+1) + \tfrac{1}{5}q(n+1,2) - \tfrac{3}{5}q(n+1,3) - \tfrac{2}{5}q(n+1,4) \\
E_n^{(4)} &= \tfrac{1}{10}(n+1) + \tfrac{1}{10}q(n+1,2) + \tfrac{1}{5}q(n+1,3) - \tfrac{7}{10}q(n+1,4)
\end{aligned}$$

(c) On a donc :

$$\begin{aligned}
E_n^{(1)} - \tfrac{2}{5}(n+1) &= \tfrac{2}{5}q(n+1,2) + \tfrac{4}{5}q(n+1,3) + \tfrac{6}{5}q(n+1,4), \\
E_n^{(2)} - \tfrac{3}{10}(n+1) &= -\tfrac{7}{10}q(n+1,2) - \tfrac{2}{5}q(n+1,3) - \tfrac{1}{10}q(n+1,4) \\
E_n^{(3)} - \tfrac{1}{5}(n+1) &= \tfrac{1}{5}q(n+1,2) - \tfrac{3}{5}q(n+1,3) - \tfrac{2}{5}q(n+1,4) \\
E_n^{(4)} - \tfrac{1}{10}(n+1) &= \tfrac{1}{10}q(n+1,2) + \tfrac{1}{5}q(n+1,3) - \tfrac{7}{10}q(n+1,4)
\end{aligned}$$

Or les membres droits sont convergents. En passant à la limite, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(E_n^{(1)} - \tfrac{2}{5}(n+1)) &= \tfrac{2}{5}\tfrac{3}{10} + \tfrac{4}{5}\tfrac{2}{10} + \tfrac{6}{5}\tfrac{1}{10}, \\
\lim_{n\to+\infty}(E_n^{(2)} - \tfrac{3}{10}(n+1)) &= -\tfrac{7}{10}\tfrac{3}{10} - \tfrac{2}{5}\tfrac{2}{10} - \tfrac{1}{10}\tfrac{1}{10} \\
\lim_{n\to+\infty}(E_n^{(3)} - \tfrac{1}{5}(n+1)) &= \tfrac{1}{5}\tfrac{3}{10} - \tfrac{3}{5}\tfrac{2}{10} - \tfrac{2}{5}\tfrac{1}{10} \\
\lim_{n\to+\infty}(E_n^{(4)} - \tfrac{1}{10}(n+1)) &= \tfrac{1}{10}\tfrac{3}{10} + \tfrac{1}{5}\tfrac{2}{10} - \tfrac{7}{10}\tfrac{1}{10}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(E_n^{(1)} - \tfrac{2}{5}(n+1)) &= \tfrac{20}{50}, \\
\lim_{n\to+\infty}(E_n^{(2)} - \tfrac{3}{10}(n+1)) &= -\tfrac{30}{100} \\
\lim_{n\to+\infty}(E_n^{(3)} - \tfrac{1}{5}(n+1)) &= -\tfrac{5}{50} \\
\lim_{n\to+\infty}(E_n^{(4)} - \tfrac{1}{10}(n+1)) &= 0
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{array}{ll}
f_1 = \frac{2}{5} & g_1 = \frac{4}{5} \\
f_2 = \frac{3}{10} & g_2 = 0 \\
f_3 = \frac{1}{5} & g_3 = \frac{1}{10} \\
f_4 = \frac{1}{10} & g_4 = \frac{1}{10}
\end{array}$$

2 Exercice

Dans les exercices qui suivent, les justifications ne sont pas demandées, on donnera directement le résultat.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

1. $\frac{3x^2-5x}{x^2+5x}$ (en 0), 2. $\frac{|2x-2|-x}{2x-4}$ (en 2) 3. $\sqrt{x^2+4x+12} - x + 2$ (en $+\infty$).

Correction

1. -1 2. $\frac{1}{2}$ 3. 4.

Exercice 2. On dispose de deux dés, un bleu et un rouge. On note a la face apparente du dé bleu et b celle du dé rouge. On considère E l'équation

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0$$

Déterminer la probabilité que cette équation ait :

1. une racine double, 2. une racine double paire, 3. pas de racine réelle.

Correction

1. $\frac{1}{6}$ 2. $\frac{1}{12}$ 3. $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.