Devoir surveillé n° 7 de mathématiques

BCPST 1 2015-2016

V.Vong

— Durée : 4 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

<u>Consigne.</u> *Les quatre parties du problème et l'exercice doivent être rendus chacun sur des copies séparées des autres. De plus, toutes les réponses aux questions d'informatique du problème doivent être réunies sur une même autre copie. Six tas de copies seront donc ramassés. Indiquez bien votre nom et votre classe sur chacune de vos copies.*

Problème

Dans ce problème, on s'intéresse à quelques méthodes d'approximation numérique du nombre $\frac{\pi}{4}$. Même si l'énoncé suit une progression logique, chaque partie présente une méthode différente et peut donc être traitée indépendamment des autres. La quatrième partie réutilise des résultats démontrés dans la troisième partie, mais chaque question où c'est nécessaire indiquera explicitement la référence dans l'énoncé.

Partie 1 - Méthode de dichotomie

Cette partie met en place un algorithme de dichotomie pour obtenir un encadrement de $\frac{\pi}{4}$.

1. Justifier rapidement que $\frac{\pi}{4}$ est l'unique solution de l'équation $\tan(x) = 1$ d'inconnue $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
2. **(Info.)** L'observation de la question précédente permet de déterminer un encadrement de $\frac{\pi}{4}$ à n'importe quelle précision à l'aide de l'algorithme ci-contre.
   Écrire en Python la fonction `dichotomie(epsilon)`. On supposera que la fonction tangente est donnée, et que `tan(x)` renvoie la valeur de $\tan(x)$ pour tout réel x.

```
dichotomie(epsilon) :
    a=0
    b=1
    tant que |b-a|>epsilon :
         c=(a+b)/2
         si tan(c)>=1 :
            b=c
         sinon :
            a=c
    retourne a,b
```

3. Étant donnée une précision `epsilon` $= \varepsilon > 0$, montrer que l'algorithme précédent répète la boucle «`tant que`» un nombre de fois égal au plus petit entier supérieur à $\ln(1/\varepsilon)/\ln(2)$ avant de retourner les deux bornes d'un encadrement de $\frac{\pi}{4}$ à ε près.

Partie 2 - Méthode de Newton

L'observation de la question 1 permet de mettre en place un algorithme plus «efficace» que celui de dichotomie à l'aide de la méthode de Newton.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée du terme initial $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = N(u_n) \quad \text{où} \quad N : x \mapsto x - \frac{\tan(x) - 1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan(x) - 1)} = x - \frac{\tan(x) - 1}{\tan^2(x) + 1}.$$

4. **(Info.)** Écrire en Python la fonction `fonctionN(x)` qui prend en argument un réel x et qui retourne la valeur de $N(x)$. Comme à la question 2, on supposera que la fonction tangente est donnée, et que `tan(x)` renvoie la valeur de $\tan(x)$.

5. **(Info.)** Écrire en Python la fonction `suiteN(a,n)` qui prend en argument un réel a et un entier naturel n, et qui retourne la valeur de u_n après avoir fixé $u_0 = a$ comme terme initial.
6. Déterminer l'ensemble de définition de N, justifier que N est π-périodique et montrer que

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad N(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4}).$$

7. En déduire que N admet un prolongement continu de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
8. Dresser le tableau des variations de N sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et prouver que $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Pour cette question, on fixe $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$ et on pose

$$f : t \mapsto N(x) - N(t) - N'(t)(x - t) - \lambda(x - t)^2$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

(a) Déterminer la constante $\lambda \in \mathbb{R}$ afin que $f(\frac{\pi}{4}) = f(x) = 0$.

(b) À l'aide du théorème de Rolle, justifier qu'il existe un réel $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $N''(c) = 2\lambda$ et en déduire que

$$N(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{N''(c)}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2.$$

(c) Déterminer le maximum de la fonction $t \mapsto |N''(t)|$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et prouver que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \left|N(x) - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant K\left|x - \frac{\pi}{4}\right|^2$$

où $K > 1$ est une constante à déterminer.

10. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \left(K\left|u_0 - \frac{\pi}{4}\right|\right)^{2^n}.$$

11. Justifier que si le terme initial $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ est choisi convenablement, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\pi}{4}$. Pour les questions suivantes on fixera $u_0 = 1$ et on admettra que $K|1 - \frac{\pi}{4}| < \frac{1}{2}$. En particulier, le résultat de la question précédente peut s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

12. **(Info.)** L'inégalité précédente permet d'obtenir une approximation de $\frac{\pi}{4}$ à n'importe quelle précision. Écrire en Python la fonction `newton(epsilon)` qui prend en argument un réel `epsilon` $= \varepsilon > 0$ et qui retourne la valeur renvoyée par `suiteN(1,n)` où n est le premier entier tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \leqslant \varepsilon$.
13. Étant donnée une précision `epsilon` $= \varepsilon > 0$, montrer que l'algorithme précédent choisit pour valeur de n le plus petit entier supérieur à $\ln(\ln(1/\varepsilon)/\ln(2))/\ln(2)$ avant de retourner une approximation de $\frac{\pi}{4}$ à ε près.
14. Comparer le résultat de la question précédente avec celui de la question 3. On pourra utiliser le théorème des croissances comparées quand $\varepsilon \to 0$.

Partie 3 - Formule de Leibniz

Un inconvénient majeur des méthodes présentées dans les deux premières parties est qu'il faut disposer d'un algorithme permettant de calculer les valeurs de la fonction tangente. Cette partie (et la suivante) propose de résoudre ce type de problème à l'aide d'approximations polynomiales.

On rappelle que la fonction tan restreinte à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est bijective et admet pour bijection réciproque la fonction $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Le principal objectif de cette partie est d'approcher la fonction arctan par la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} X^{2k+1} \in \mathbb{R}[X].$$

15. **(Info.)** Écrire en Python la fonction `arctanApprox(x,n)` qui prend en argument un réel x et un entier naturel n, et qui retourne la valeur de $P_n(x)$.
16. Rappeler la dérivée de la fonction arctan et justifier que la fonction arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
17. Pour cette question, on fixe $x \in \mathbb{R}^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, et on pose

$$g : t \mapsto \arctan(t) - P_n(t) - \mu t^{2n+3}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est une constante.

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}$ et en déduire que

$$\arctan'(t) = P_n'(t) + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

(b) Déterminer la constante $\mu \in \mathbb{R}$ afin que $g(0) = g(x) = 0$.

(c) À l'aide du théorème de Rolle, justifier qu'il existe un réel c tel que $\frac{(-1)^{n+1}}{1+c^2} = \mu(2n+3)$ et en déduire que

$$\arctan(x) = P_n(x) + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)(1+c^2)}.$$

(d) À l'aide du résultat précédent, démontrer que

$$\forall x \in [-1,1],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\arctan(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

18. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. En particulier, démontrer la formule de Leibniz :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots .$$

19. **(Info.)** Écrire en Python la fonction `leibniz(x,epsilon)` qui prend en argument un réel $x \in [-1,1]$ et un réel `epsilon` $= \varepsilon > 0$, et qui retourne la valeur renvoyée par `arctanApprox(x,n)` où n est le premier entier tel que $\frac{1}{2n+3} \leqslant \varepsilon$.
20. Étant donnée une précision `epsilon` $= \varepsilon > 0$, montrer que l'algorithme précédent choisit pour valeur de n un entier supérieur à une expression que l'on déterminera en fonction de ε.
21. Comparer l'expression de la question précédente avec celle de la question 3. On pourra utiliser le théorème des croissances comparées quand $\varepsilon \to 0$.

Partie 4 - Formule d'Euler du type de Machin

Un inconvénient majeur de la méthode présentée dans la partie précédente est son «inefficacité» par rapport aux méthodes présentées dans les deux premières parties. Cette partie propose d'exploiter quelques propriétés de la fonction arctan pour améliorer l'efficacité de la méthode précédente.

22. Pour cette question, on fixe $y \in \mathbb{R}$ et on pose

$$h : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

(a) Discuter du cas $y = 0$. On supposera $y \neq 0$ pour les questions suivantes.

(b) Déterminer l'ensemble de définition de h et justifier que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ensemble.

(c) Calculer la dérivée de h.

(d) En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy < 1$, on a :

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

(e) Que se passe-t-il pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy > 1$?

23. Démontrer la formule d'Euler du type de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

24. À l'aide du résultat de la question 17(c), démontrer que

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ \forall n \in \mathbb{N},\quad |\arctan(x) - P_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}.$$

25. Déduire des résultats précédents que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left|\frac{\pi}{4} - P_n\left(\frac{1}{2}\right) - P_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}.$$

26. **(Info.)** L'inégalité précédente permet d'obtenir une approximation de $\frac{\pi}{4}$ à n'importe quelle précision. Écrire en Python la fonction `euler(epsilon)` qui prend en argument un réel `epsilon` $= \varepsilon > 0$ et qui retourne la valeur de $P_n(\frac{1}{2}) + P_n(\frac{1}{3})$ où n est le premier entier tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} \leqslant \varepsilon$. On pourra utiliser la fonction `arctanApprox(x,n)` de la question 15 qui retourne la valeur de $P_n(x)$.
27. Étant donnée une précision `epsilon` $= \varepsilon > 0$, montrer que l'algorithme précédent choisit pour valeur de n un entier supérieur à une expression que l'on déterminera en fonction de ε. Comparer cette expression avec celle de la question 3. On pourra utiliser un équivalent quand $\varepsilon \to 0$.

Exercice

On note $\mathcal{C} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$V : \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + 2\mu + 2\nu \\ z = 2\lambda + \mu + 3\nu \\ t = \lambda + \mu + \nu \end{cases},\ (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad W : \begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ 2y - 3z + 2t = 0 \\ 3x - y - t = 0 \end{cases}.$$

1. Justifier que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ de V.
3. Déterminer une base $(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$ de W.
4. Déterminer le rang de la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$. Est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
5. Extraire de la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$ une base de $F = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$.
6. On considère les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{f}_1} = (1, 0, -1, 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{f}_2} = (0, -1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{f}_3} = (1, 1, 1, 1)$.
   Montrer que la famille $\left(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}\right)$ est une base de F.
7. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
8. Déterminer la matrice $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}$ qui vérifie :

$$\forall j \in \{1, 2, 3, 4\}, \overrightarrow{e_j} = \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \overrightarrow{\mathrm{f}_i} + x_{4j} \overrightarrow{e_4}.$$

9. Montrer que pour chaque $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique couple $(\overrightarrow{\mathrm{f}}, \tau) \in F \times \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{f}} + \tau \overrightarrow{e_4}$.