Corrigé du DS n° 7 de mathématiques

Problème

Dans ce problème, on s'intéresse à quelques méthodes d'approximation numérique du nombre $\frac{\pi}{4}$. Même si l'énoncé suit une progression logique, chaque partie présente une méthode différente et peut donc être traitée indépendamment des autres. La quatrième partie réutilise des résultats démontrés dans la troisième partie, mais chaque question où c'est nécessaire indiquera explicitement la référence dans l'énoncé.

Partie 1 - Méthode de dichotomie

Cette partie met en place un algorithme de dichotomie pour obtenir un encadrement de $\frac{\pi}{4}$.

1. *Justifier rapidement que $\frac{\pi}{4}$ est l'unique solution de l'équation $\tan(x) = 1$ d'inconnue $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.*

   ▶ L'application $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est bijective (par exemple d'après le théorème de la bijection), donc $1 \in \mathbb{R}$ admet un unique antécédent $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par cette application, autrement dit $\boxed{\text{l'équation } \tan(x) = 1 \text{ d'inconnue } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ admet une unique solution}}$. Puisque $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, on en déduit que $\boxed{\frac{\pi}{4} \text{ est l'unique solution de cette équation}}$.

2. ***(Info.)** L'observation de la question précédente permet de déterminer un encadrement de $\frac{\pi}{4}$ à n'importe quelle précision à l'aide de l'algorithme ci-contre.*
   Écrire en Python la fonction `dichotomie(epsilon)`. On supposera que la fonction tangente est donnée, et que `tan(x)` renvoie la valeur de $\tan(x)$ pour tout réel x.

```
dichotomie(epsilon) :
    a=0
    b=1
    tant que |b-a|>epsilon :
        c=(a+b)/2
        si tan(c)>=1 :
            b=c
        sinon :
            a=c
    retourne a,b
```

   ▶

```
def dichotomie(epsilon) :
    a=0
    b=1
    while abs(b-a)>epsilon :
        c=(a+b)/2
        if tan(c)>=1 :
            b=c
        else :
            a=c
    return a,b
```

3. *Étant donnée une précision `epsilon` $= \varepsilon > 0$, montrer que l'algorithme précédent répète la boucle «`tant que`» un nombre de fois égal au plus petit entier supérieur à $\ln(1/\varepsilon)/\ln(2)$ avant de retourner les deux bornes d'un encadrement de $\frac{\pi}{4}$ à ε près.*

   ▶ Chaque répétition de la boucle «`tant que`» de l'algorithme précédent divise par 2 la valeur de $|b - a|$. On reconnaît une suite géométrique : la valeur de $|b - a|$ est égale à $|1 - 0|/2^n = 1/2^n$ à la

n-ième itération. Puisque la boucle est répétée si $|b-a|>\varepsilon$, elle est répétée un nombre de fois égal au premier entier n tel que

$$\frac{1}{2^n}\leqslant\varepsilon\Leftrightarrow 2^n\geqslant\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n\ln(2)\geqslant\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\Leftrightarrow n\geqslant\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$$

car ln est strictement croissante et $\ln(2)>0$. Finalement, l'algorithme précédent répète la boucle «`tant que`» un nombre de fois égal au plus petit entier supérieur à $\boxed{\ln(1/\varepsilon)/\ln(2)}$.

Partie 2 - Méthode de Newton

L'observation de la question 1 permet de mettre en place un algorithme plus «efficace» que celui de dichotomie à l'aide de la méthode de Newton.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée du terme initial $u_0\in[0,\frac{\pi}{2}[$ et la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=N(u_n)\quad \text{où}\quad N:x\mapsto x-\frac{\tan(x)-1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan(x)-1)}=x-\frac{\tan(x)-1}{\tan^2(x)+1}.$$

4. ***(Info.)*** *Écrire en Python la fonction **`fonctionN(x)`** qui prend en argument un réel x et qui retourne la valeur de $N(x)$. Comme à la question 2, on supposera que la fonction tangente est donnée, et que **`tan(x)`** renvoie la valeur de $\tan(x)$.*

▶

```
def fonctionN(x) :
        N=x-(tan(x)-1)/(tan(x)**2+1)
    return N
```

5. ***(Info.)*** *Écrire en Python la fonction **`suiteN(a,n)`** qui prend en argument un réel a et un entier naturel n, et qui retourne la valeur de u_n après avoir fixé $u_0=a$ comme terme initial.*

▶

```
def suiteN(a,n) :
    u=a
    for i in range(n) :
        u=fonctionN(u)
    return u
```

6. *Déterminer l'ensemble de définition de N et montrer que*

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\},\quad N(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).$$

▶ La fonction N est une somme, un quotient et une composée de fonctions usuelles. Elle est définie pour toutes les valeurs de $x\in\mathbb{R}$ telles que $\tan(x)$ est définie et que $\tan^2(x)+1\neq 0$. Or la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ et $\tan^2+1\geqslant 0+1>0$. Donc l'ensemble de définition de la fonction N est $\boxed{\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}}$. De plus, on a pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$:

$$\begin{aligned}
N(x)&=x-\frac{\tan(x)-1}{\tan^2(x)+1}=x-\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-1}{\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2+1}=x-\frac{\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\cos(x)}}{\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}}=x-\frac{(\sin(x)-\cos(x))\cos(x)}{\sin^2(x)+\cos^2(x)}\\
&=x-\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x)\quad(\text{car }\cos^2(x)+\sin^2(x)=1\text{ d'après le théorème de Pythagore})\\
&=x-\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\quad(\text{car }\sin(2x)=2\cos(x)\sin(x)\text{ et }\cos(2x)=2\cos^2-1)\\
&=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\cos(2x)\cos(\frac{\pi}{4})-\sin(2x)\sin(\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}/2}\quad(\text{car }\cos(\tfrac{\pi}{4})=\sin(\tfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}/2)\\
&=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\quad(\text{car }\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)).
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad N(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

La question originale comportait une erreur d'énoncé : il était aussi demandé de prouver que N est π-périodique ce qui est bien sûr faux puisque par exemple :

$$N(0) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \neq \pi + 1 = \pi + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = N(1).$$

La correction prendra en compte cette erreur d'énoncé.

7. *En déduire que N admet un prolongement continu de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

► Soit $k \in \mathbb{Z}$. Puisque la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + k\pi} N(x) &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + k\pi} \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Inutile de perdre du temps à simplifier cette limite, ce n'est pas nécessaire pour justifier l'existence du prolongement continu.

Puisque cette limite existe pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $\boxed{N \text{ se prolonge par continuité sur } \mathbb{R}}$ et ce prolongement continu est défini par :

$$N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto N(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

En particulier, $\boxed{\text{ce prolongement continu est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ comme somme et composée de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

8. *Dresser le tableau des variations de N sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et prouver que $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

► En utilisant l'expression de N obtenue à la question 6 (et justifiée sur $\mathbb{R}$ dans la question précédente), on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$N'(x) = 1 + 0 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

De plus on a :

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

On en déduit d'après le cercle trigonométrique que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned}N'(x) = 1 - \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \\ &\Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $x = \frac{\pi}{4}$. D'où le tableau des variations de N :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$N'(x)$		$-$	0	$+$	
$N(x)$	1	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

car :

$$N(0) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$
$$N\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$
$$N\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Montrons par récurrence que $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. On a bien $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ car $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ d'après l'énoncé.
Hérédité. On suppose que $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé. Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_{n+1} = N(u_n)$ donc $u_{n+1} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ d'après le tableau des variations de N sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. En particulier, on a bien $u_{n+1} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ car $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{u_n \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

9. *Pour cette question, on fixe $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$ et on pose*

$$f : t \mapsto N(x) - N(t) - N'(t)(x - t) - \lambda(x - t)^2$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

(a) *Déterminer la constante $\lambda \in \mathbb{R}$ afin que $f(\frac{\pi}{4}) = f(x) = 0$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= N(x) - N\left(\frac{\pi}{4}\right) - N'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \lambda\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \\ &= N(x) - \frac{\pi}{4} - 0 \times \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \lambda\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \\ &= N(x) - \frac{\pi}{4} - \lambda\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

et :

$$f(x) = N(x) - N(x) - N'(x)(x - x) - \lambda(x - x)^2 = 0.$$

Ainsi, $f(\frac{\pi}{4}) = f(x) = 0$ si et seulement si :

$$\boxed{\lambda = \frac{N(x) - \frac{\pi}{4}}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}} \quad \text{car } x \neq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \neq 0.$$

(b) *Justifier qu'il existe un réel $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $N''(c) = 2\lambda$ et en déduire que*

$$N(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{N''(c)}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2.$$

▶ Si $x < \frac{\pi}{4}$ alors la fonction f est continue sur $[x, \frac{\pi}{4}]$ et dérivable sur $]x, \frac{\pi}{4}[$ comme somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ ($N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ d'après le résultat de la question 7). De même, si $x > \frac{\pi}{4}$ alors $f \in \mathcal{C}^0([\frac{\pi}{4}, x]) \cap \mathcal{D}^1([x, \frac{\pi}{4}])$. Puisqu'on a choisi λ à la question précédente afin que $f(\frac{\pi}{4}) = f(x)$, on en déduit d'après le théorème de Rolle qu'il existe $c \in]x, \frac{\pi}{4}[\subset [0, \frac{\pi}{2}]$ si $x < \frac{\pi}{4}$ ou $c \in]\frac{\pi}{4}, x[\subset [0, \frac{\pi}{2}]$ si $x > \frac{\pi}{4}$ tel que :

$$\begin{aligned} 0 = f'(c) &= 0 - N'(c) - \Big(N''(c)(x-c) + N'(c) \times (-1)\Big) - \lambda\Big(-2(x-c)\Big) \\ &= \Big(-N''(c) + 2\lambda\Big)(x-c). \end{aligned}$$

N'oubliez pas de vérifier précisément les hypothèses du théorème de Rolle avant de l'appliquer afin de montrer que vous connaissez l'énoncé du cours.

Puisque $c \neq x$, on a bien justifié dans tous les cas $\boxed{\text{l'existence de } c \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } N''(c) = 2\lambda}$.
En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient que :

$$N''(c) = 2\lambda = 2\frac{N(x) - \frac{\pi}{4}}{(x - \frac{\pi}{4})^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{N(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{N''(c)}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}.$$

(c) *Déterminer le maximum de la fonction $t \mapsto |N''(t)|$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et prouver que*

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \left|N(x) - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant K\left|x - \frac{\pi}{4}\right|^2$$

où $K > 1$ est une constante à déterminer.

► En utilisant l'expression de N' calculée à la question 8, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$N''(t) = 0 - 2\sqrt{2}\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad N'''(t) = 4\sqrt{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Puisque $2t + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ quand $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient d'après le cercle trigonométrique que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$N'''(t) = 4\sqrt{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2t + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \Leftrightarrow t \in \left[0, \frac{3\pi}{8}\right]$$

avec égalité si et seulement si $t = \frac{3\pi}{8}$. D'où le tableau des variations de N'' :

t	0		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
$N'''(t)$		$+$	0	$-$	
$N''(t)$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

car :

$$\begin{aligned} N''(0) &= -2\sqrt{2}\cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 \\ N''\left(\frac{3\pi}{8}\right) &= -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} \times (-1) = 2\sqrt{2} \\ N''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -2\sqrt{2}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2. \end{aligned}$$

Ainsi les extrema de la fonction N'' sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ sont -2 (minimum) et $2\sqrt{2}$. On en déduit que $\boxed{\text{le maximum de la fonction } t \mapsto |N''(t)| \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ est égal à } 2\sqrt{2}}$. En particulier, on obtient d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}\left|N(x)-\frac{\pi}{4}\right| &= \left|\left(\frac{\pi}{4}+\frac{N''(c)}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)-\frac{\pi}{4}\right| \\ &= \left|\frac{N''(c)}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right| = \frac{|N''(c)|}{2}\left|x-\frac{\pi}{4}\right|^2 \\ &\leqslant \frac{2\sqrt{2}}{2}\left|x-\frac{\pi}{4}\right|^2 = \sqrt{2}\left|x-\frac{\pi}{4}\right|^2 \quad \text{car } c\in[0,\tfrac{\pi}{2}].\end{aligned}$$

On a donc démontré cette inégalité pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$ mais elle est aussi vraie pour $x = \frac{\pi}{4}$ car $N(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \left|N(x)-\frac{\pi}{4}\right| \leqslant K\left|x-\frac{\pi}{4}\right|^2 \quad \text{avec } K=\sqrt{2}>1}.$$

10. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n-\frac{\pi}{4}\right| \leqslant \left(K\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|\right)^{2^n}.$$

▶

Attention : question astucieuse car on ne peut pas la démontrer directement par récurrence. En observant ce qu'il se passe pour les premiers termes, on remarque d'après le résultat précédent que :

$$\left|u_1-\frac{\pi}{4}\right| = \left|N(u_0)-\frac{\pi}{4}\right| \leqslant K\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|^2$$

$$\left|u_2-\frac{\pi}{4}\right| = \left|N(u_1)-\frac{\pi}{4}\right| \leqslant K\left|u_1-\frac{\pi}{4}\right|^2 \leqslant K\left(K\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|^2\right)^2 = K^3\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|^4$$

$$\left|u_3-\frac{\pi}{4}\right| = \left|N(u_2)-\frac{\pi}{4}\right| \leqslant K\left|u_2-\frac{\pi}{4}\right|^2 \leqslant K\left(K^3\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|^4\right)^2 = K^7\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|^8$$

$$\left|u_4-\frac{\pi}{4}\right| = \left|N(u_3)-\frac{\pi}{4}\right| \leqslant K\left|u_3-\frac{\pi}{4}\right|^2 \leqslant K\left(K^7\left|u_0-\frac{\pi}{8}\right|^4\right)^2 = K^{15}\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|^{16}$$

$$\ldots$$

Ainsi, la bonne inégalité à démontrer par récurrence est la suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n-\frac{\pi}{4}\right| \leqslant K^{2^n-1}\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|^{2^n}.$$

Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n-\frac{\pi}{4}\right| \leqslant K^{2^n-1}\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|^{2^n}.$$

Initialisation. On a pour $n = 0$:

$$K^{2^0-1}\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|^{2^0} = K^0\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|^1 = \left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|$$

donc l'inégalité est vraie pour $n = 0$.
Hérédité. On suppose que l'inégalité est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé. Puisque $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ d'après le résultat de la question 8, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}\left|u_{n+1}-\frac{\pi}{4}\right| = \left|N(u_n)-\frac{\pi}{4}\right| &\leqslant K\left|u_n-\frac{\pi}{4}\right|^2 \\ &\leqslant K\left(K^{2^n-1}\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|^{2^n}\right)^2 \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= K^{1+(2^n-1)\times 2}\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|^{2^n\times 2} = K^{2^{n+1}-1}\left|u_0-\frac{\pi}{4}\right|^{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité est vraie au rang $n+1$ dès qu'elle est vraie au rang n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a prouvé que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant K^{2^n-1}\left|u_0 - \frac{\pi}{4}\right|^{2^n}.$$

Or on a en utilisant que $K > 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \times K^{2^n-1}\left|u_0 - \frac{\pi}{4}\right|^{2^n} \leqslant K \times K^{2^n-1}\left|u_0 - \frac{\pi}{4}\right|^{2^n} = K^{2^n}\left|u_0 - \frac{\pi}{4}\right|^{2^n}.$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \left(K\left|u_0 - \frac{\pi}{4}\right|\right)^{2^n}}.$$

11. *Justifier que si le terme initial $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ est choisi convenablement, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\pi}{4}$. Pour les questions suivantes on fixera $u_0 = 1$ et on admettra que $K|1-\frac{\pi}{4}| < \frac{1}{2}$. En particulier, le résultat de la question précédente assure que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

▶ Si on choisit le terme initial $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ suffisamment proche de $\frac{\pi}{4}$ afin que $K|u_0 - \frac{\pi}{4}| < 1$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(K\left|u_0 - \frac{\pi}{4}\right|\right)^{2^n} = 0.$$

On en déduit d'après le résultat de la question précédente et le théorème de la limite par encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|u_n - \frac{\pi}{4}\right| = 0.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{si le terme initial } u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[\text{ est choisi tel que } K|u_0 - \frac{\pi}{4}| < 1 \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ $\boxed{\text{converge vers } \frac{\pi}{4}}$.

12. ***(Info.)*** *L'inégalité précédente permet d'obtenir une approximation de $\frac{\pi}{4}$ à n'importe quelle précision. Écrire en Python la fonction **`newton(epsilon)`** qui prend en argument un réel **`epsilon`** $= \varepsilon > 0$ et qui retourne la valeur renvoyée par **`suiteN(1,n)`** où n est le premier entier tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \leqslant \varepsilon$.*

▶

```
newton(epsilon) :
   n=0
   while (1/2)**(2**n)>epsilon :
        n=n+1
   return suiteN(1,n)
```

Autre possibilité :

```
newton(epsilon) :
   a=1/2
   n=0
   while a>epsilon :
        a=a*a
        n=n+1
   return suiteN(1,n)
```

Cette deuxième méthode a l'avantage d'effectuer moins de multiplication que la première.

13. *Étant donnée une précision* **epsilon** $= \varepsilon > 0$, *montrer que l'algorithme précédent choisit pour valeur de n le plus petit entier supérieur à $\ln(\ln(1/\varepsilon)/\ln(2))/\ln(2)$ avant de retourner une approximation de $\frac{\pi}{4}$ à ε près.*

▶ L'algorithme précédent choisit pour valeur de n le premier entier tel que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow 2^{2^n} \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow 2^n \ln(2) \geqslant \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow 2^n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$$

$$\Leftrightarrow n\ln(2) \geqslant \ln\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}\right) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}\right)}{\ln(2)}$$

car ln est strictement croissante et $\ln(2) > 0$. Ainsi, l'algorithme précédent choisit pour valeur de n le plus petit entier supérieur à $\boxed{\ln(\ln(1/\varepsilon)/\ln(2))/\ln(2)}$.

14. *Comparer le résultat de la question précédente avec celui de la question 3. On pourra utiliser le théorème des croissances comparées quand $\varepsilon \to 0$.*

▶ On a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln(\ln(1/\varepsilon)/\ln(2))/\ln(2)}{\ln(1/\varepsilon)/\ln(2)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln(\ln(1/\varepsilon)/\ln(2))}{\ln(1/\varepsilon)/\ln(2)} \times \frac{1}{\ln(2)} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} \times \frac{1}{\ln(2)}$$

en posant $X = \ln(1/\varepsilon)/\ln(2)$ car $X \to +\infty$ quand $\varepsilon \to 0$. Or $\ln(X) = o_{X\to+\infty}(X)$ d'après le théorème des croissances comparées, d'où :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln(\ln(1/\varepsilon)/\ln(2))/\ln(2)}{\ln(1/\varepsilon)/\ln(2)} = 0.$$

Ainsi la boucle «`tant que`» de l'algorithme de la partie 1 est répétée infiniment plus de fois que celle de l'algorithme précédent quand la précision ε tend vers 0. On peut en conclure que $\boxed{\text{la méthode de Newton fournit un algorithme plus «efficace» que la méthode de dichotomie}}$.

Partie 3 - Formule de Leibniz

Un inconvénient majeur des méthodes présentées dans les deux premières parties est qu'il faut disposer d'un algorithme permettant de calculer les valeurs de la fonction tangente. Cette partie (et la suivante) propose de résoudre ce type de problème à l'aide d'approximations polynomiales.

On rappelle que la fonction tan *restreinte à l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *est bijective et admet pour bijection réciproque la fonction* $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. *Le principal objectif de cette partie est d'approcher la fonction* arctan *par la suite de fonctions polynomiales* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} X^{2k+1} \in \mathbb{R}[X].$$

15. ***(Info.)*** *Écrire en Python la fonction* **arctanApprox(x,n)** *qui prend en argument un réel x et un entier naturel n, et qui retourne la valeur de $P_n(x)$.*

▶ Cela correspond à de l'évaluation de polynômes. On peut alors utiliser la méthode de Horner. Ce qui donne l'algorithme suivant :

```
def arctanApprox(x,n) :
    S=(-1)**n/(2*n+1)
    for i in range(n-1,-1,-1) :
        S=S*x
        S=S+(-1)**i/(2*i+1)
    return S
```

16. *Rappeler la dérivée de la fonction* arctan *et justifier que la fonction* arctan *est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

▶ On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On constate que la dérivée est l'inverse du polynôme X^2+1 qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent $\arctan'$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même pour arctan.

17. *Pour cette question, on fixe $x \in \mathbb{R}^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, et on pose*

$$g : t \mapsto \arctan(t) - P_n(t) - \mu t^{2n+3}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est une constante.

(a) *Soit $t \in \mathbb{R}$. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k}$ et en déduire que*

$$\arctan'(t) = P_n'(t) + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

▶ On a :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^n (-t^2)^k.$$

On reconnaît alors la somme des termes d'une suite géométrique de raison$-t^2 \neq 1$ (car $t \in \mathbb{R}$). Donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}}.$$

Or :

$$P_n'(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}(2k+1)X^{2k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k X^{2k}$$

et $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, donc :

$$\boxed{\arctan'(t) = P_n'(t) + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}}.$$

(b) *Déterminer la constante $\mu \in \mathbb{R}$ afin que $g(0) = g(x) = 0$.*

▶ On constate que l'on a $g(0) = 0$. On cherche donc μ tel que $g(x) = 0$. Or :

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow \arctan(x) - P_n(x) - \mu x^{2n+3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \mu x^{2n+3} = \arctan(x) - P_n(x) \\ &\Leftrightarrow \mu = \frac{\arctan(x) - P_n(x)}{x^{2n+3}} \quad (\text{car } x \neq 0) \end{aligned}$$

On pose donc $\boxed{\mu = \frac{\arctan(x) - P_n(x)}{x^{2n+3}}}$.

(c) *Justifier qu'il existe un réel c tel que $\frac{(-1)^{n+1}}{1+c^2} = \mu(2n+3)$ et en déduire que*

$$\arctan(x) = P_n(x) + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)(1+c^2)}.$$

▶ La fonction g étant combinaison linéaire de la fonction arctan et de polynômes qui sont C^∞ sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'elle est C^∞ sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle est continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, où $a = \min(0, x)$ et $b = \max(0, x)$. De plus, on a déterminé μ de manière à avoir $g(0) = g(x) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$g'(c) = 0.$$

Or :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = \arctan'(t) - P_n'(t) - \mu(2n+3)t^{2n+2},$$

et (question 17.a) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \arctan'(t) = P_n'(t) + \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}.$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} - \mu(2n+3)t^{2n+2},$$

Comme $g'(c) = 0$, on en déduit que

$$\frac{(-c^2)^{n+1}}{1+c^2} - \mu(2n+3)c^{2n+2} = 0$$

Comme $c \in]a, b[$, c est non nul. D'où :

$$\mu(2n+3) = \frac{(-1)^{n+1}}{1+c^2}.$$

On a donc $(2n+3 \neq 0)$:

$$\mu = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)(1+c^2)}.$$

Or, on a vu que $\mu = \frac{\arctan(x) - P_n(x)}{x^{2n+3}}$. Donc :

$$\frac{\arctan(x) - P_n(x)}{x^{2n+3}} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)(1+c^2)}.$$

D'où :

$$\arctan(x) - P_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)(1+c^2)}.$$

Donc :

$$\arctan(x) = P_n(x) + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)(1+c^2)}.$$

(d) À l'aide du résultat précédent, démontrer que

$$\forall x \in [-1, 1],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\arctan(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

► Pour $x = 0$, l'inégalité est clairement vérifiée. Supposons que $x \in [-1, 1]$ et x non nul. D'après la question précédente, il existe $c \in]a, b[$ avec $a = \min(0, x)$, $b = \max(0, x)$ tel que :

$$\arctan(x) = P_n(x) + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)(1+c^2)}.$$

Donc :

$$|\arctan(x) - P_n(x)| = \left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(1+c^2)}\right|$$

Or $|x| \leq 1$, donc $|x^{2n+3}| \leq 1$. De plus, $1 + c^2 \geq 1 > 0$, donc $\frac{1}{1+c^2} \leq 1$. D'où :

$$\left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(1+c^2)}\right| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Autrement dit :

$$|\arctan(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

18. *Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. En particulier, démontrer la formule de Leibniz :*

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots .$$

▶ Soient $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On sait que :

$$|\arctan(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Donc :

$$\arctan(x) - \frac{1}{2n+3} \leq P_n(x) \leq \arctan(x) + \frac{1}{2n+3}$$

Or $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$. Donc les extrémités de ces inégalités ont pour limite $\arctan(x)$ lorsque n tend vers l'infini. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \arctan(x).$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(1) = \arctan(1)$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

19. ***(Info.)** Écrire en Python la fonction **`leibniz(x,epsilon)`** qui prend en argument un réel $x \in [-1,1]$ et un réel **`epsilon`** $= \varepsilon > 0$, et qui retourne la valeur renvoyée par **`arctanApprox(x,n)`** où n est le premier entier tel que $\frac{1}{2n+3} \leqslant \varepsilon$.*

▶

```
def leibniz(x,epsilon) :
    n=1
    while 1/(2*n+3)>epsilon :
        n=n+1
    return arctanApprox(x,n)
```

20. *Étant donnée une précision **`epsilon`** $= \varepsilon > 0$, montrer que l'algorithme précédent choisit pour valeur de n un entier supérieur à une expression que l'on déterminera en fonction de ε.*

▶ On constate que l'on sort de la boucle dès que l'on a :

$$\frac{1}{2n+3} \leq \epsilon \Leftrightarrow 1 \leq (2n+3)\epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} \leq 2n+3 \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} - 3 \leq 2n \Leftrightarrow \frac{1-3\epsilon}{2\epsilon} \leq n$$

21. *Comparer l'expression de la question précédente avec celle de la question 3. On pourra utiliser le théorème des croissances comparées quand $\varepsilon \to 0$.*

▶ Dans la partie 1, on a $n \geq \frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\ln(2)}$. Comparons$\frac{1-3\epsilon}{2\epsilon}$ à $\frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\ln(2)}$, lorsque ϵ tend vers 0. On constate que ces expressions ne s'annule pas pour ϵ assez petit. On a :

$$\frac{\frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\ln(2)}}{\frac{1-3\epsilon}{2\epsilon}} = \frac{2\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\ln(2)\frac{1-3\epsilon}{\epsilon}} \sim_0 \frac{2\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\ln(2)\frac{1}{\epsilon}}$$

car $1 - 3\epsilon \sim_0 1$. Or : $\lim_{\epsilon\to 0, \epsilon>0} \frac{1}{\epsilon} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Donc $\lim_{\epsilon\to 0,\epsilon>0} \frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\frac{1}{\epsilon}} = 0$. Il en résulte que le quotient initial a pour limite 0. Donc $\frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\ln(2)}$ est négligeable devant $\frac{1-3\epsilon}{2\epsilon}$ en 0. Cela signifie qu'il faut "beaucoup" moins d'itérations dans l'algorithme de dichotomie. Autrement dit celui-ci semble plus efficace que ce nouvel algorithme.

Partie 4 - Formule d'Euler du type de Machin

Un inconvénient majeur de la méthode présentée dans la partie précédente est son «inefficacité» par rapport aux méthodes présentées dans les deux premières parties. Cette partie propose d'exploiter quelques propriétés de la fonction arctan *pour améliorer l'efficacité de la méthode précédente.*

22. Pour cette question, on fixe $y \in \mathbb{R}$ et on pose

$$h : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

(a) Discuter du cas $y = 0$. On supposera $y \neq 0$ pour les questions suivantes.

▶

(b) Déterminer l'ensemble de définition de h et justifier que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ensemble.

▶ Si $y = 0$. Dans ce cas, $\arctan(y) = 0$ et on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(x) = \arctan(x).$$

(c) Calculer la dérivée de h.

▶ La fonction h est définie si et seulement si $1 - xy \neq 0$. Comme $y \neq 0$, elle est donc définie sur$\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{y}\}$. La fonction $h_1 : x \mapsto \frac{x+y}{1-xy}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{y}\}$ car quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble. Comme arctan est C^∞ sur $\mathbb{R}$, on en déduit par composition que $\arctan \circ h_1$ est C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{y}\}$. Donc la fonction h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{y}\}$ comme combinaison linéaire de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{y}\}$. On a :

$$\forall x \neq \frac{1}{y}, h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(\frac{x+y}{1-xy})^2}\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}$$

Donc :

$$\forall x \neq \frac{1}{y}, h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1-xy)^2}{((1-xy)^2+(x+y)^2)}\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}$$

Donc :

$$\forall x \neq \frac{1}{y}, h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy}$$

Donc :

$$\forall x \neq \frac{1}{y}, h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1+y^2)(1+x^2)}$$

D'où :

$$\forall x < \frac{1}{y}, h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

(d) En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy < 1$, on a :

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

▶ La fonction h' est nulle sur$\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{y}\}$. Par conséquent h est constante sur les intervalles suivants : $]-\infty, \frac{1}{y}[$ et $]\frac{1}{y}, +\infty[$.

— Cas 1 : $y > 0$. Donc $0 \in]-\infty, \frac{1}{y}[$. Or $h(0) = 0$ et h est constante sur cet intervalle. Par conséquent $h = 0$ sur $]-\infty, \frac{1}{y}[$. Autrement dit :

$$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{y}[, \arctan(x) + \arctan(y) = \arctan(\frac{x+y}{1-xy}).$$

— Cas 2 : $y < 0$. Donc $0 \in]\frac{1}{y}, +\infty[$. Or $h(0) = 0$ et h est constante sur cet intervalle. Par conséquent $h = 0$ sur $]\frac{1}{y}, +\infty[$. Autrement dit :

$$\forall x \in]\frac{1}{y}, +\infty[, \arctan(x) + \arctan(y) = \arctan(\frac{x+y}{1-xy}).$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Constatons que l'on a :

$$xy < 1 \Leftrightarrow (x < \frac{1}{y} \text{ et } y > 0) \text{ ou } (x > \frac{1}{y} \text{ et } y < 0) \text{ ou } (y = 0)$$

Pour chacun des trois cas, on a vu que la fonction h est nulle. En résumé, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $xy < 1$:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

(e) *Que se passe-t-il pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy > 1$?*

▶ Supposons que $xy > 1$. Dans ce cas $y \neq 0$ et cela revient à regarder la fonction h sur l'intervalle $]-\infty, \frac{1}{y}[$ si $y < 0$ et sur $]\frac{1}{y}, +\infty[$ si $y > 0$.

— Cas 1 : $y > 0$. On sait que h est constante sur $]\frac{1}{y}, +\infty[$. Notons celle-ci c. On a : $\lim_{x \to +\infty} h(x) = c$. Or $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{x+y}{1-xy} \sim_{x \to +\infty} \frac{-1}{y}$. Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+y}{1-xy} = \frac{-1}{y}.$$

Donc : $\lim_{x \to +\infty} \arctan(\frac{x+y}{1-xy}) = \arctan(\frac{-1}{y})$. D'où :

$$c = \frac{\pi}{2} + \arctan(y) - \arctan(\frac{-1}{y}) = \frac{\pi}{2} + \arctan(y) + \arctan(\frac{1}{y}).$$

Or, en faisant tendre x vers $\frac{1}{y}$ avec $x < \frac{1}{y}$ dans l'égalité de 22.(d), on constate que $\arctan(y) + \arctan(\frac{1}{y}) = \frac{\pi}{2}$. Donc : $c = \pi$.

— Cas 2 : $y < 0$. On sait que h est constante sur $]-\infty, \frac{1}{y}[$. Notons celle-ci d. On a : $\lim_{x \to -\infty} h(x) = d$. Or $\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = \frac{-\pi}{2}$ et $\frac{x+y}{1-xy} \sim_{x \to -\infty} \frac{-1}{y}$. Donc $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+y}{1-xy} = \frac{-1}{y}$. Donc : $\lim_{x \to -\infty} \arctan(\frac{x+y}{1-xy}) = \arctan(\frac{-1}{y})$. D'où :

$$c = \frac{-\pi}{2} + \arctan(y) - \arctan(\frac{-1}{y}) = \frac{-\pi}{2} + \arctan(y) + \arctan(\frac{1}{y}).$$

Or, en faisant tendre x vers $\frac{1}{y}$ avec $x < \frac{1}{y}$ dans l'égalité de 22.(d), on constate que $\arctan(y) + \arctan(\frac{1}{y}) = \frac{-\pi}{2}$. Donc : $d = -\pi$.

En résumé :

— Si $xy > 1$ et x, y positifs, alors :

$$\arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \pi.$$

— Si $xy > 1$ et x, y négatifs, alors :

$$\arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = -\pi.$$

23. *Démontrer la formule d'Euler du type de Machin :*

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

▶ On pose $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$. On a bien : $ab < 1$. Donc d'après la question 22, on a :

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan(\frac{a+b}{1-ab}).$$

Or : $\frac{a+b}{1-ab} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = 1$. Donc :

$$\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

24. *À l'aide du résultat de la question 17(c), démontrer que*

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\arctan(x) - P_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}.$$

▶ Soit $x \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. D'après la question 17.c, on sait que :

$$|\arctan(x) - P_n(x)| = \left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(1+c^2)}\right|$$

Comme $|x| \leq \frac{1}{2}$ en en déduit que $|x^{2n+3}| \leq (\frac{1}{2})^{2n+3}$. De plus, $\frac{1}{2n+3} \leq 1$ et $\frac{1}{1+c^2} \leq 1$ D'où :

$$\left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(1+c^2)}\right| \leq (\frac{1}{2})^{2n+3}$$

Autrement dit :

$$|\arctan(x) - P_n(x)| \leq (\frac{1}{2})^{2n+3}$$

25. *Déduire des résultats précédents que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{\pi}{4} - P_n\left(\frac{1}{2}\right) - P_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}.$$

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$|\frac{\pi}{4} - P_n(\frac{1}{2}) - P_n(\frac{1}{3})| = |\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}) - P_n(\frac{1}{2}) - P_n(\frac{1}{3})|$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$|\frac{\pi}{4} - P_n(\frac{1}{2}) - P_n(\frac{1}{3})| \leq |\arctan(\frac{1}{2}) - P_n(\frac{1}{2})| + |\arctan(\frac{1}{3}) - P_n(\frac{1}{3})|$$

Or $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sont dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Donc en appliquant l'inégalité précédente, on en déduit que

$$|\frac{\pi}{4} - P_n(\frac{1}{2}) - P_n(\frac{1}{3})| \leq 2(\frac{1}{2})^{2n+3} = (\frac{1}{2})^{2n+2}.$$

26. ***(Info.)*** *L'inégalité précédente permet d'obtenir une approximation de $\frac{\pi}{4}$ à n'importe quelle précision. Écrire en Python la fonction* **`euler(epsilon)`** *qui prend en argument un réel* **`epsilon`** $= \varepsilon > 0$ *et qui retourne la valeur de $P_n(\frac{1}{2}) + P_n(\frac{1}{3})$ où n est le premier entier tel que $(\frac{1}{2})^{2n+2} \leqslant \varepsilon$. On pourra utiliser la fonction* **`arctanApprox(x,n)`** *de la question 15 qui retourne la valeur de $P_n(x)$.*

▶

```
def euler(epsilon) :
    n=0
    while (1/2)**(2*n+2) > epsilon :
        n=n+1
    return arctanApprox(1/2,n)+arctanApprox(1/3,n)
```

27. *Étant donnée une précision* **`epsilon`** $= \varepsilon > 0$*, montrer que l'algorithme précédent choisit pour valeur de n un entier supérieur à une expression que l'on déterminera en fonction de ε. Comparer cette expression avec celle de la question 3. On pourra utiliser un équivalent quand $\varepsilon \to 0$.*

▶ On constate que l'on cherche le premier entier n tel que :

$$\begin{array}{lll} & (\frac{1}{2})^{2n+2} & \leq \epsilon \\ \Leftrightarrow & (2n+2)\ln(\frac{1}{2}) & \leq \ln(\epsilon) \\ \Leftrightarrow & (2n+2)\ln(2) & \geq \ln(\frac{1}{\epsilon}) \\ \Leftrightarrow & 2n & \geq \frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\ln(2)} - 2 \\ \Leftrightarrow & n & \geq \frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{2\ln(2)} - 1 \end{array}$$

Comparons les deux expressions. En effectuant le quotient, on a :

$$\frac{\frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{2\ln(2)} - 1}{\ln(\frac{1}{\epsilon})/\ln(2)} \sim \frac{\frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{2\ln(2)}}{\ln(\frac{1}{\epsilon})/\ln(2)} = \frac{1}{2}$$

Donc le n correspondant à dichotomie est deux fois plus grand que le n correspondant à Euler. Il en résulte que l'algorithme de dichotomie est deux fois moins efficace que l'algorithme Euler.

Exercice

Définition : un **hyperplan** H de $\mathbb{R}^n$ est ensemble de la forme :

$$H = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\},$$

où $(a_1, \cdots, a_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$.

On note $\mathcal{C} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$V : \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + 2\mu + 2\nu \\ z = 2\lambda + \mu + 3\nu \\ t = \lambda + \mu + \nu \end{cases}, (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \quad et \quad W : \begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ 2y - 3z + 2t = 0 \\ 3x - y - t = 0 \end{cases}.$$

1. *Justifier que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.*

▶ Le sous-ensemble V est décrit par une représentation paramétrique qu'on peut aussi écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} V &= \left\{(\lambda + 2\mu, 2\lambda + 2\mu + 2\nu, 2\lambda + \mu + 3\nu, \lambda + \mu + \nu) \mid (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{\lambda(1,2,2,1) + \mu(2,2,1,1) + \nu(0,2,3,1) \mid (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \text{Vect}\Big((1,2,2,1), (2,2,1,1), (0,2,3,1)\Big). \end{aligned}$$

En particulier, $\boxed{V \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$.

Le sous-ensemble W est décrit par une représentation cartésienne qu'on peut aussi écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} W &= \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-2z+t=0 \text{ et } 2y-3z+2t=0 \text{ et } 3x-y-t=0\big\} \\ &= \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-2z+t=0\big\} \cap \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y-3z+2t=0\big\} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \cap \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x-y-t=0\big\}. \end{aligned}$$

On reconnaît l'intersection de trois hyperplans de $\mathbb{R}^4$, donc $\boxed{W \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$.

On peut également utiliser la définition d'un sous-espace vectoriel en montrant que $\overrightarrow{0} \in V$ et $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} \in V$ pour tout $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \in V^2$ et tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ (et de même pour W) mais c'est plus long que la méthode rédigée ici.

2. *Déterminer une base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ de V.*

▶ On a vu à la question précédente que

$$V = \mathrm{Vect}\Big((1,2,2,1),(2,2,1,1),(0,2,3,1)\Big)$$

donc la famille $((1,2,2,1),(2,2,1,1),(0,2,3,1))$ est génératrice de V. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}\Big((1,2,2,1),(2,2,1,1),(0,2,3,1)\Big) &= \mathrm{rang}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\Big((1,2,2,1),(2,2,1,1),(0,2,3,1)\Big)\right) \\ &= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\ &= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_2 \end{array} \\ &= 2 \end{aligned}$$

donc la famille $((1,2,2,1),(2,2,1,1),(0,2,3,1))$ est liée. De plus, ce calcul de rang permet également de montrer que le système linéaire $\lambda(1,2,2,1)+\mu(2,2,1,1)+\nu(0,2,3,1) = (0,0,0,0)$ est de rang 2 avec deux équations auxiliaires compatibles et une inconnue auxiliaire. Il admet donc une infinité de solutions qui s'expriment en fonction de l'inconnue auxiliaire $\nu = s$ vue comme un paramètre :

$$\left\{\begin{array}{r} \lambda + 2\mu = 0 \\ -2\mu + 2\nu = 0 \\ \nu = s \end{array}\right., s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -2\mu = -2s \\ \mu = \nu = s \\ \nu = s \end{array}\right., s \in \mathbb{R}.$$

En particulier, on obtient pour $s = 1$:

$$-2(1,2,2,1)+(2,2,1,1)+(0,2,3,1) = (0,0,0,0) \quad \text{donc} \quad (0,2,3,1) = 2(1,2,2,1)-(2,2,1,1).$$

On aurait aussi pu remarquer cette relation sans calculer le rang. Mais ce calcul aurait permis de conclure si on avait obtenu un rang égal à 3. De plus, on peut réutiliser ce calcul pour justifier que la famille $((1,2,2,1),(2,2,1,1)$ est libre (voir ci-dessous).

On en déduit que

$$V = \mathrm{Vect}\Big((1,2,2,1),(2,2,1,1),(0,2,3,1)\Big) = \mathrm{Vect}\Big((1,2,2,1),(2,2,1,1)\Big)$$

donc la famille $((1,2,2,1),(2,2,1,1))$ est génératrice de V. Et en reprenant le calcul du rang précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}\operatorname{rang}\Big((1,2,2,1),(2,2,1,1)\Big) &= \dim\Big(\operatorname{Vect}\Big((1,2,2,1),(2,2,1,1)\Big)\Big)\\ &= \dim\Big(\operatorname{Vect}\Big((1,2,2,1),(2,2,1,1),(0,2,3,1)\Big)\Big)\\ &= \operatorname{rang}\Big((1,2,2,1),(2,2,1,1),(0,2,3,1)\Big) = 2\end{aligned}$$

donc la famille $((1,2,2,1),(2,2,1,1))$ est libre.

Finalement, $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}) = \Big((1,2,2,1),(2,2,1,1)\Big) \text{ est une base de } V}$.

On peut bien sûr obtenir d'autres bases avec des méthodes différentes. Par exemple : on commence par choisir un premier vecteur $\overrightarrow{v_1} \in V\setminus\{\overrightarrow{0}\}$, on observe alors que $\overrightarrow{v_1}$ n'est pas générateur de V, puis on complète avec un deuxième vecteur $\overrightarrow{v_2} \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ non colinéaire à $\overrightarrow{v_1}$ (donc $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})$ forme une famille libre), on observe alors que ces deux vecteurs sont générateurs de V.

3. *Déterminer une base $(\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_4})$ de W.*

▶ On a :

$$W : \begin{cases} x+y-2z+t=0 \\ 2y-3z+2t=0 \\ 3x-y-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 .$$

On obtient un système linéaire de rang 2 avec une équation auxiliaire compatible et deux inconnues auxiliaires. Il admet donc une infinité de solutions qui s'expriment en fonction des deux inconnues auxiliaires $z = s_1$ et $t = s_2$ vues comme des paramètres :

$$W : \begin{cases} x+y = 2z-t = 2s_1 - s_2 \\ 2y = 3z-2t = 3s_1 - 2s_2 \\ z = s_1 \\ t = s_2 \end{cases}, (s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (2s_1 - s_2) - (\frac{3}{2}s_1 - s_2) = \frac{1}{2}s_1 & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ y = \frac{3}{2}s_1 - s_2 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ z = s_1 \\ t = s_2 \end{cases}, (s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Le sous-espace vectoriel W est maintenant décrit par une représentation paramétrique qu'on peut aussi écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
W &= \left\{\left(\frac{1}{2}s_1, \frac{3}{2}s_1 - s_2, s_1, s_2\right) \mid (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \left\{s_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0\right) + s_2\,(0, -1, 0, 1) \mid (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0\right), (0, -1, 0, 1)\right) \\
&= \mathrm{Vect}\Big((1, 3, 2, 0), (0, -1, 0, 1)\Big).
\end{aligned}$$

Donc la famille $((1, 3, 2, 0), (0, -1, 0, 1))$ est génératrice de W. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rang}\Big((1,3,2,0),(0,-1,0,1)\Big) &= \mathrm{rang}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\Big((1,3,2,0),(0,-1,0,1)\Big)\right) \\
&= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ \\ \end{matrix} \\
&= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix} \\
&= 2
\end{aligned}$$

donc la famille $((1, 3, 2, 0), (0, -1, 0, 1))$ est libre.

Finalement, $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}) = \Big((1,3,2,0),(0,-1,0,1)\Big) \text{ est une base de } W}$.

De même que la question précédente, on peut obtenir d'autres bases avec des méthodes différentes ou avec la même méthode mais avec des opérations élémentaires sur les lignes différentes.

4. *Déterminer le rang de la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$. Est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rang}\Big(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}\Big) &= \mathrm{rang}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\Big(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}\Big)\right) \\
&= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \\ \\ L_4 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}) \text{ est de rang } 3}$. Puisque c'est une famille de 4 vecteurs, $\boxed{\text{elle n'est pas libre}}$. Et puisque $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, $\boxed{\text{elle n'est pas génératrice de } \mathbb{R}^4}$.

5. *Extraire de la famille* $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$ *une base de* $F = \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$.

▶ On considère le système linéaire suivant :

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{w_3} + \lambda_4\overrightarrow{w_4} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On reconnait la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4})$ qu'on a échelonné à la question précédente. Par conséquent, ce système linéaire est de rang 3 avec une équation auxiliaire compatible et une inconnue auxiliaire. Il admet donc une infinité de solutions qui s'expriment en fonction de l'inconnue auxiliaire λ_4. En particulier, en fixant le paramètre $\lambda_4 = 1$, on obtient une relation $\overrightarrow{w_4} = -\lambda_1\overrightarrow{v_1} - \lambda_2\overrightarrow{v_2} - \lambda_3\overrightarrow{w_3}$. On en déduit que

$$F = \text{Vect}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}\right)$$

donc la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3})$ est génératrice de F. Et en reprenant le calcul du rang de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{rang}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}\right) &= \dim\left(\text{Vect}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}\right)\right) \\ &= \dim\left(\text{Vect}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}\right)\right) = \text{rang}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}\right) = 3 \end{aligned}$$

donc la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3})$ est libre.

Finalement, $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}) \text{ est une base de } F}$.

Question astucieuse qui peut se faire sans aucun calcul, seulement en exploitant le calcul du rang de la question précédente. Il est inutile de perdre du temps à déterminer les coefficients $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *qui permettent d'écrire* $\overrightarrow{w_4}$ *comme combinaison linéaire des autres vecteurs puisque ce n'est pas demandé.*

6. *On considère les vecteurs* $\overrightarrow{f_1} = (1, 0, -1, 0)$, $\overrightarrow{f_2} = (0, -1, 0, 1)$ *et* $\overrightarrow{f_3} = (1, 1, 1, 1)$. *Montrer que la famille* $\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)$ *est une base de* F.

▶ D'après le résultat de la question précédente, F est de dimension 3. Il suffit donc de démontrer que $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ est une famille libre de F.

Il est également suffisant de démontrer que $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ *est une famille génératrice de* F*, c'est-à-dire que* $F = \text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$*. Pour cela, soit on raisonne par double inclusion soit on montre une seule inclusion et l'égalité des dimensions.*

On a :

$$\begin{aligned} \text{rang}\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right) &= \text{rang}\left(\text{Mat}_{\mathcal{C}}\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)\right) \\ &= \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix} \\ &= \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

donc la famille $(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3})$ est libre. Pour montrer que chaque vecteur de cette famille appartient à F, on commence par déterminer une représentation cartésienne de F. On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} F = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_3}\right) &= \left\{\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{w_3} \mid (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{\lambda_1(1,2,2,1) + \lambda_2(2,2,1,1) + \lambda_3(1,3,2,0) \mid (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \end{aligned}$$

d'où une représentation paramétrique de F qu'on transforme en représentation cartésienne :

$$\begin{aligned} F : &\begin{cases} x = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ y = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ z = 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ t = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}, (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = (t-\lambda_2) + 2\lambda_2 + \lambda_3 = t + \lambda_2 + \lambda_3 \\ y = 2(t-\lambda_2) + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 2t + 3\lambda_3 \\ z = 2(t-\lambda_2) + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 2t - \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 = t - \lambda_2 \end{cases}, (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = t + (-z + 2t + 2\lambda_3) + \lambda_3 = -z + 3t + 3\lambda_3 \\ y = 2t + 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -z + 2t + 2\lambda_3 \end{cases}, (\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^2 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = -z + 3t + 3\left(\dfrac{y-2t}{3}\right) = y - z + t \\ \lambda_3 = \dfrac{y-2t}{3} \end{cases}, \lambda_3 \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & x - y + z - t = 0. \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ car $\dim(F) = 3$ d'après le résultat de la question précédente, il suffit donc de chercher une représentation cartésienne de F de la forme $ax + by + cz + dt = 0$.

En particulier, on a :
— $\overrightarrow{\mathrm{f}_1} = (1,0,-1,0) \in F$ car $1 - 0 + (-1) - 0 = 0$,
— $\overrightarrow{\mathrm{f}_2} = (0,-1,0,1) \in F$ car $0 - (-1) + 0 - 1 = 0$
— et $\overrightarrow{\mathrm{f}_3} = (1,1,1,1) \in F$ car $1 - 1 + 1 - 1 = 0$.

Finalement, $(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3})$ est une famille libre de F. Puisque $\dim(F) = 3$ d'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}) \text{ est une base de } F}$.

7. *Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*

▶ Puisque $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, il suffit de démontrer que $(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4})$ est une famille libre. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}\left(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4}\right) &= \mathrm{rang}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\left(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4}\right)\right) \\ &= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix} \\ &= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} \\ &= 4 \end{aligned}$$

donc la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4})$ est libre. Puisque $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$.

8. Déterminer la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.

▶ Soit $\overrightarrow{u} = (x,y,z,t) = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} + t\overrightarrow{e_4} \in \mathbb{R}^4$. Les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{e_4})$ de $\mathbb{R}^4$ forment l'unique solution du système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{f_1} + \lambda_2\overrightarrow{f_2} + \lambda_3\overrightarrow{f_3} + \lambda_4\overrightarrow{e_4} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+x \\ t+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} x \\ -y \\ \frac{1}{2}(z+x) \\ (t+y)-(z+x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2}(z+x) \\ -y + \frac{1}{2}(z+x) \\ \frac{1}{2}(z+x) \\ (t+y)-(z+x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ \lambda_4 = -x + y - z + t \end{cases}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{u}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left((x,y,z,t)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ -x + y - z + t \end{pmatrix}.$$

Faire ce calcul pour un vecteur $\overrightarrow{u} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ quelconque permet de ne pas avoir à refaire quatre fois le même calcul pour chaque vecteur de $\mathcal{C}$.

En remplaçant $\overrightarrow{u} = (x,y,z,t)$ par les coordonnées des vecteurs de la base canonique on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left((1,0,0,0)\right) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left((0,1,0,0)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{e_3}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left((0,0,1,0)\right) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{e_4}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left((0,0,0,1)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et finalement :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{C}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left((\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

9. *Montrer que pour chaque $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique couple $(\overrightarrow{\mathrm{f}}, \tau) \in F \times \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{f}} + \tau \overrightarrow{e_4}$.*

► Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4$.

Existence. Puisque la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4})$ est une base de $\mathbb{R}^4$, il existe une unique liste de coordonnées $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ telle que $\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3 \overrightarrow{\mathrm{f}_3} + \lambda_4 \overrightarrow{e_4}$. On pose $\overrightarrow{\mathrm{f}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3 \overrightarrow{\mathrm{f}_3}$ et $\tau = \lambda_4$. Alors $\overrightarrow{\mathrm{f}} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}) = F$ car $(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3})$ est une base de F et $\overrightarrow{\mathrm{f}} + \tau \overrightarrow{e_4} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3 \overrightarrow{\mathrm{f}_3} + \lambda_4 \overrightarrow{e_4} = \overrightarrow{u}$. Il existe donc bien un couple $(\overrightarrow{\mathrm{f}}, \tau) \in F \times \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{f}} + \tau \overrightarrow{e_4}$.

Unicité. On suppose qu'il existe deux couples $(\overrightarrow{\mathrm{f}}, \tau) \in F \times \mathbb{R}$ et $(\overrightarrow{\mathrm{f}'}, \tau') \in F \times \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{f}} + \tau \overrightarrow{e_4} = \overrightarrow{\mathrm{f}'} + \tau' \overrightarrow{e_4}$. Puisque la famille $(\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3})$ est une base de F, il existe deux uniques listes de coordonnées $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3') \in \mathbb{R}^3$ telles que $\overrightarrow{\mathrm{f}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3 \overrightarrow{\mathrm{f}_3}$ et $\overrightarrow{\mathrm{f}'} = \lambda_1' \overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2' \overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3' \overrightarrow{\mathrm{f}_3}$. Par conséquent : $\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3 \overrightarrow{\mathrm{f}_3} + \tau \overrightarrow{e_4} = \lambda_1' \overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2' \overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3' \overrightarrow{\mathrm{f}_3} + \tau' \overrightarrow{e_4}$. Par unicité des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\mathrm{f}_1}, \overrightarrow{\mathrm{f}_2}, \overrightarrow{\mathrm{f}_3}, \overrightarrow{e_4})$, on en déduit que $\lambda_1 = \lambda_1'$, $\lambda_2 = \lambda_2'$, $\lambda_3 = \lambda_3'$ et $\tau = \tau'$. En particulier, on obtient que $\overrightarrow{\mathrm{f}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2 \overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3 \overrightarrow{\mathrm{f}_3} = \lambda_1' \overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \lambda_2' \overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \lambda_3' \overrightarrow{\mathrm{f}_3} = \overrightarrow{\mathrm{f}'}$ et $\tau = \tau'$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{\mathrm{f}}, \tau) = (\overrightarrow{\mathrm{f}'}, \tau')$.

Conclusion. Par conséquent, $\boxed{\text{pour tout } \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4, \text{ il existe un unique couple } (\overrightarrow{\mathrm{f}}, \tau) \in F \times \mathbb{R} \text{ tel que}}$ $\boxed{\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{f}} + \tau \overrightarrow{e_4}}$

Question facile et qui ne nécessite aucun calcul si on maîtrise parfaitement son cours sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. On peut également exploiter le calcul effectué à la question 8 qui démontre que pour tout $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, l'unique solution de l'équation $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{f}} + \tau \overrightarrow{e_4}$ d'inconnue $(\overrightarrow{\mathrm{f}}, \tau) \in F \times \mathbb{R}$ est

$$\overrightarrow{\mathrm{f}} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z\right) \overrightarrow{\mathrm{f}_1} + \left(\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z\right) \overrightarrow{\mathrm{f}_2} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z\right) \overrightarrow{\mathrm{f}_3} \text{ et } \tau = -x + y - z + t.$$