Devoir surveillé 8 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

---

1 Problème : un modèle probabiliste de développement d'une population

On étudie un modèle simplifié de développement d'une population obéissant aux règles suivantes.

— Étant donné un individu Z quelconque d'une génération, il a une probabilité p_i d'avoir i enfants. On suppose que le nombre maximum d'enfants d'un individu est de 2.

— On suppose que le nombre d'enfants d'un individu est indépendant du nombre d'enfants des autres individus de la même génération.

— On suppose qu'un individu ne vit qu'une seule génération : si X vit à la n^{e} génération, il donne naissance (ou pas) à des individus de la $(n+1)^{\mathrm{e}}$ génération et ne fera pas partie de la $(n+1)^{\mathrm{e}}$ génération.

On note Z_n le nombre d'individus de la n^{e} génération.

L'objectif est de déterminer des conditions nous permettant de prédire la survie ou l'extinction de cette population.

1.1 Préliminaires

Pour X une variable aléatoire à valeur dans $\{0, \cdots, n\}$, on appelle fonction génératrice de X (notée ϕ_X) la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k.$$

1. Soit X et Y deux variables aléatoires finies à valeurs dans $\mathbb{N}$. Justifier que X et Y ont même loi si et seulement si $\phi_X = \phi_Y$.
2. Déterminer la fonction génératrice d'une loi binomiale de paramètre n, p. On écrira le résultat sous une forme factorisée.
3. Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$ où $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $\phi_X(1)$.
   (b) Exprimer $E(X)$ en fonction de $\phi'_X(1)$.
4. (INFO) Écrire une fonction python `nbreEnfants(L)` qui prend en argument une liste $L = [p_0, p_1, p_2]$ et qui retourne i avec probabilité p_i.
5. (INFO) Écrire une fonction python `population(n,L)` qui prend en argument un entier n et une liste $L = [p_0, p_1, p_2]$ et qui retourne la valeur Z_n. On suppose que $Z_0 = 1$.

1.2 Relations entre les ϕ_{Z_n}

On rappelle que si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$, alors :

$$PQ(X) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k,$$

où $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$, où $a_j = 0$ si $j > n$ et $b_{k-j} = 0$ si $k-j > m$ ou $k-j < 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$. On pose $\phi_{Z_n,k}$ la fonction génératrice de Z_n avec comme condition initiale $Z_0 = k$, et on note $\phi = \phi_{Z_1,1}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\phi_{Z_n,0}$.
2. Déterminer ϕ.
3. Montrer que $\phi_{Z_1,2} = \phi^2$.
4. Déterminer la valeur maximale possible de Z_n lorsque $Z_0 = 1$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $\phi_{Z_n,2} = \phi^2_{Z_n,1}$.
   (a) On suppose $Z_0 = 2$. On note X_n le nombre de descendants à la génération n provenant du premier individu X_0 de la génération 0 et Y_n le nombre de descendants à la génération n provenant du deuxième individu Y_0 de la génération 0. En considérant le système complet d'événements $(X_n = i \cap Y_n = j)_{0\leq i,j \in \leq 2^n}$, montrer que :
   $$P(Z_n = k|Z_0 = 2) = \sum_{j=0}^{k} P(X_n = j|X_0 = 1)P(Y_n = k - j|Y_0 = 1).$$
   (b) En déduire que :
   $$P(Z_n = k|Z_0 = 2) = \sum_{j=0}^{k} P(Z_n = j|Z_0 = 1)P(Z_n = k - j|Z_0 = 1).$$
   (c) En déduire que $\phi_{Z_n,2} = \phi^2_{Z_n,1}$.
6. On veut montrer que $\phi_{Z_{n+1},1} = \phi \circ \phi_{Z_n,1}$.
   (a) En considérant le système complet d'événements $(Z_1 = i)_{0\leq i\leq 2}$, montrer que :
   $$\phi_{Z_{n+1},1}(t) = p_0\phi_{Z_n,0}(t) + p_1\phi_{Z_n,1}(t) + p_2\phi_{Z_n,2}(t).$$
   (b) En déduire que $\phi_{Z_{n+1},1} = \phi \circ \phi_{Z_n,1}$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \phi_{Z_n,1} = \phi \circ \cdots \circ \phi = \phi^{\star n}$ (n fois ϕ).
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, E(Z_{n+1}) = mE(Z_n)$, où m est l'espérance du nombre d'enfants d'un individu. On pourra utiliser le résultat établi en préliminaires question 3.
9. Interpréter le résultat si $\phi'(1) < 1$.

1.3 Probabilité d'extinction et de survie

On considère la fonction ϕ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2$$

où $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, $p_0 > 0, p_1 > 0, p_2 > 0$.

On cherche à étudier la fonction ϕ.

1. Montrer que $\phi'(1) > 1$ si et seulement si $\frac{p_0}{p_2} < 1$.
2. Déterminer les racines de $\phi(X) - X$.
3. En déduire le signe de $\phi(t) - t$ sur $[0, 1]$ en fonction du signe de $\phi'(1) - 1$.
   On suppose désormais que $\phi'(1) > 1$.
4. Déterminer les points fixes de ϕ.
5. Tracer (de manière approximative) le graphe de ϕ ainsi que la droite représentant l'identité sur $[0, 1]$. Placer également les points d'intersection.
6. On admet que la probabilité d'extinction de la population est donnée par la limite de la suite définie par :
   $$\begin{array}{rrcl} & u_0 & = & 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} & = & \phi(u_n) \end{array}$$
   En particulier, on admet que cette suite est convergente. Exprimer cette probabilité en fonction de p_0 et de p_2.
7. En déduire la probabilité de survie de l'espèce.

2 Exercice : approximation de $\cos(1)$

On cherche à déterminer une valeur approchée de $\cos(1)$. Pour cela, le résultat suivant sera nécessaire :

$$\forall f \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0; x[, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1}. \tag{1}$$

1. On fixe f une fonction de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et x un réel non nul. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P(n) : \exists \theta \in]0; x[, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

   (a) Montrer que $P(0)$ est vraie.

   (b) Pour montrer que $P(n)$ est vraie, on définit g par :

$$\forall t \in [0; x], g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) t^k}{k!} - A \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   où A est une constante telle que $g(x) = 0$. Déterminer A.

   (c) Montrer que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, il existe $\theta_k \in]0; x]$ tel que $g^{(k)}(\theta_k) = 0$. On pourra prouver cette proposition par récurrence et à l'aide du théorème de Rolle.

   (d) En déduire que $P(n)$ est vraie. On pourra appliquer le théorème de Rolle à $g^{(n)}$ sur un segment bien choisi.

2. Rappeler la formule du développement limité de $\cos(x)$ à l'ordre $2n$ en 0.
3. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$\cos(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k!} + \frac{\cos^{(2n+1)}(\theta)}{(2n+1)!}.$$

4. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k!}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\cos(1) - S_n| \leq \frac{1}{(2n+1)!}.$$

   En déduire que (S_n) est convergente et sa limite.

5. (INFO) Écrire une fonction python `factoriel(n)` qui prend en argument un entier naturel n et qui retourne $n!$.
6. (INFO) Déduire des résultats précédents une fonction en python `approx(epsilon)` qui prend en argument ϵ et qui retourne une valeur x tel que :

$$|\cos(1) - x| < \epsilon.$$