Devoir surveillé 8 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

1 Problème : un modèle probabiliste de développement d'une population

On étudie un modèle simplifié de développement d'une population obéissant aux règles suivantes.

— Étant donné un individu Z quelconque d'une génération, il a une probabilité p_i d'avoir i enfants. On suppose que le nombre maximum d'enfants d'un individu est de 2.
— On suppose que le nombre d'enfants d'un individu est indépendant du nombre d'enfants des autres individus de la même génération.
— On suppose qu'un individu ne vit qu'une seule génération : si X vit à la n^{e} génération, il donne naissance (ou pas) à des individus de la $(n+1)^{\text{e}}$ génération et ne fera pas partie de la $(n+1)^{\text{e}}$ génération.

On note Z_n le nombre d'individus de la n^{e} génération.
L'objectif est de déterminer des conditions nous permettant de prédire la survie ou l'extinction de cette population.

1.1 Préliminaires

Pour X une variable aléatoire à valeur dans $\{0, \cdots, n\}$, on appelle fonction génératrice de X (notée ϕ_X) la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k.$$

1. Soit X et Y deux variables aléatoires finies à valeurs dans $\mathbb{N}$. Justifier que X et Y ont même loi si et seulement si $\phi_X = \phi_Y$.
2. Déterminer la fonction génératrice d'une loi binomiale de paramètre n, p. On écrira le résultat sous une forme factorisée.
3. Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$ où $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $\phi_X(1)$.
   (b) Exprimer $E(X)$ en fonction de $\phi'_X(1)$.
4. (INFO) Écrire une fonction python `nbreEnfants(L)` qui prend en argument une liste $L = [p_0, p_1, p_2]$ et qui retourne i avec probabilité p_i.
5. (INFO) Écrire une fonction python `population(n,L)` qui prend en argument un entier n et une liste $L = [p_0, p_1, p_2]$ et qui retourne la valeur Z_n. On suppose que $Z_0 = 1$.

Correction

1. Supposons que X et Y ont même loi. On a donc :

$$\forall k \in \{0, \cdots, n\} P(X=k) = P(Y=k).$$

Il en résulte que $\phi_X = \phi_Y$.
Réciproquement, supposons que $\phi_X = \phi_Y$. Par unicité de l'écriture d'un polynôme sous la forme $\sum a_k X^k$, on en déduit que :

$$\forall k \in \{0, \cdots, n\} P(X=k) = P(Y=k).$$

Donc X et Y ont même loi.

2. Soit X une loi binomiale de paramètre n, p. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) \begin{array}{cl} = & \sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k \\ = & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k \\ = & (1-p+pt)^n. \end{array}$$

3. (a) On a :

$$\phi_X(1) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$$

car la famille $(X=k)_{0 \leq k \leq n}$ forme un système complet d'événements.

(b) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi_X'(x) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k) k x^{k-1}.$$

On a donc :

$$\phi_X'(1) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)k = E(X).$$

4. Voici la fonction `nbreEnfants`.

```
def nbreEnfants(L) :
    x=random.random()
    n=len(L)
    for i in range(n) :
        if x<L[i] :
            return i
        x=x-L[i]
    return n
```

5. Voici la fonction `population`.

```
def population(n,L) :
    Z=1
    Y=1
    for i in range(n) :
        if Y==0 :
            return 0
        Z=Y
        Y=0
        for i in range(Z) :
            Y=Y+nbreEnfants(L)
    return Y
```

1.2 Relations entre les ϕ_{Z_n}

On rappelle que si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$, alors :

$$PQ(X) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k,$$

où $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$, où $a_j = 0$ si $j > n$ et $b_{k-j} = 0$ si $k - j > m$ ou $k - j < 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$. On pose $\phi_{Z_n,k}$ la fonction génératrice de Z_n avec comme condition initiale $Z_0 = k$, et on note $\phi = \phi_{Z_1,1}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\phi_{Z_n,0}$.
2. Déterminer ϕ.
3. Montrer que $\phi_{Z_1,2} = \phi^2$.
4. Déterminer la valeur maximale possible de Z_n lorsque $Z_0 = 1$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $\phi_{Z_n,2} = \phi_{Z_n,1}^2$.

(a) On suppose $Z_0 = 2$. On note X_n le nombre de descendants à la génération n provenant du premier individu X_0 de la génération 0 et Y_n le nombre de descendants à la génération n provenant du deuxième individu Y_0 de la génération 0. En considérant le système complet d'événements $(X_n = i \cap Y_n = j)_{0 \leq i,j \in \leq 2^n}$, montrer que :

$$P(Z_n = k | Z_0 = 2) = \sum_{j=0}^{k} P(X_n = j | X_0 = 1) P(Y_n = k - j | Y_0 = 1).$$

(b) En déduire que :

$$P(Z_n = k | Z_0 = 2) = \sum_{j=0}^{k} P(Z_n = j | Z_0 = 1) P(Z_n = k - j | Z_0 = 1).$$

(c) En déduire que $\phi_{Z_n,2} = \phi_{Z_n,1}^2$.

6. On veut montrer que $\phi_{Z_{n+1},1} = \phi \circ \phi_{Z_n,1}$.

(a) En considérant le système complet d'événements $(Z_1 = i)_{0 \leq i \leq 2}$, montrer que :

$$\phi_{Z_{n+1},1}(t) = p_0 \phi_{Z_n,0}(t) + p_1 \phi_{Z_n,1}(t) + p_2 \phi_{Z_n,2}(t).$$

(b) En déduire que $\phi_{Z_{n+1},1} = \phi \circ \phi_{Z_n,1}$.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \phi_{Z_n,1} = \phi \circ \cdots \circ \phi = \phi^{\star n}$ (n fois ϕ).
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, E(Z_{n+1}) = mE(Z_n)$, où m est l'espérance du nombre d'enfants d'un individu. On pourra utiliser le résultat établi en préliminaires question 3.
9. Interpréter le résultat si $\phi'(1) < 1$.

Correction

1. Si $Z_0 = 0$, cela signifie que la population a disparu. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, P(Z_n = 0) = 1$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \phi_{Z_n,0}(t) = 1.$$

2. On a :

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{2} P(Z_1 = k) t^k$$

Or, $Z_0 = 1$. On a donc $P(Z_1 = k) = p_k$. D'où :

$$\phi(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $P(n)$: la valeur maximale de Z_n (notée x_n) est égale à 2^n.
Pour $n = 0$, la propriété est vraie. Supposons que la propriété est vraie au rang n. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. Tout individu ayant au plus 2 enfants, il en résulte que $x_{n+1} \leq 2x_n$. On en déduit que $x_{n+1} = 2^{n+1}$. La probabilité d'avoir deux enfants étant non nuls, on en déduit que $x_{n+1} = 2^{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence, on en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On note X_1 le nombre de fils du premier individu et Y_1 le nombre de fils du deuxième individu. Soit $k \in \mathbb{N}$. En considérant le système complet d'événements $(X_1 = i, Y_1 = j)$, on a :

$$P(Z_1 = k) = \sum_{0 \leq i,j \leq 2} P(Z_1 = k, X_1 = i, Y_1 = j)$$

Or $X_1 + Y_1 = Z_1$. Donc : $P(Z_1 = k, X_1 = i, Y_1 = j) = 0$ si $i + j \neq 0$. D'où

$$P(Z_1 = k) = \sum_{i=0}^{2} P(X_1 = i, Y_1 = k - i)$$

Les événements $(X_1 = i)$ et $(Y_1 = k - i)$ étant indépendant, on en déduit que :

$$P(Z_1 = k) = \sum_{i=0}^{2} P(X_1 = i) P(Y_1 = k - i).$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{Z_1,2}(t) = \sum_{k=0}^{4} P(Z_1 = k)t^k = \sum_{k=0}^{4}(\sum_{i=0}^{2} P(X_1 = i)t^i P(Y_1 = k - i)t^{k-i}).$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{Z_1,2}(t) = (\sum_{i=0}^{2} P(X_1 = i)t^i)(\sum_{i=0}^{2} P(Y_1 = i)t^i)$$

Or X_1 et Y_1 suivent la même loi, qui est la même loi que Z_1 dans le cas où $Z_0 = 1$. Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{Z_1,2}(t) = \phi(t)^2.$$

5. (a) On a :

$$P(Z_n = k|Z_0 = 2) = \sum_{i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}} P(Z_n = k, X_n = i, Y_n = j|Z_0 = 2)$$

Or $Z_n = X_n + Y_n$. Donc $P(Z_n = k, X_n = i, Y_n = j|Z_0 = 2) = 0$ si $i + j \neq k$. Donc :

$$P(Z_n = k|Z_0 = 2) = \sum_{i=0}^{k} P(X_n = i, Y_n = k - i|Z_0 = 2)$$

Or les événements $(X_n = i)$ et $(Y_n = j)$ sont indépendants. Donc :

$$P(Z_n = k|Z_0 = 2) = \sum_{i=0}^{k} P(X_n = i|Z_0 = 2)P(Y_n = k - i|Z_0 = 2)$$

Or $Z_0 = 2$, signifie que $X_0 = 1, Y_0 = 1$. D'où

$$P(Z_n = k|Z_0 = 2) = \sum_{i=0}^{k} P(X_n = i|X_0 = 1)P(Y_n = k - i|Y_0 = 1)$$

Or X_n et Y_n suivent la même loi que Z_n dans le cas où $Z_0 = 1$. Donc :

$$P(Z_n = k|Z_0 = 2) = \sum_{i=0}^{k} P(Z_n = i|Z_0 = 1)P(Z_n = k - i|Z_0 = 1)$$

(b) En notant N la valeur maximale de Z_n dans le cas où $Z_0 = 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{N} P(Z_n = k|Z_0 = 2)t^k = \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{k}(P(Z_n = i|X_0 = 1)P(Z_n = k - i|Y_0 = 1))t^k$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{N} P(Z_n = k|Z_0 = 2)t^k = \sum_{k=0}^{N}(\sum_{i=0}^{k}(P(Z_n = i|Z_0 = 1)t^i P(Z_n = k - i|Z_0 = 1)t^{k-i})$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{N} P(Z_n = k|Z_0 = 2)t^k = (\sum_{i=0}^{N} P(Z_n = i|Z_0 = 1)t^i)(\sum_{i=0}^{N} P(Z_n = i|Z_0 = 1)t^i).$$

Il en résulte que :

$$\phi_{Z_n,2} = \phi_{Z_n,1}\phi_{Z_n,1} = \phi_{Z_n,1}^2.$$

6. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Notons N la valeur maximale de Z_{n+1}. On a :

$$\phi_{Z_{n+1},1}(t) = \sum_{k=0}^{N} P(Z_{n+1} = k)t^k$$

En utilisant le système complet d'événements $Z_1 = 0, 1, 2$, on a :

$$\phi_{Z_{n+1},1}(t) = \sum_{k=0}^{N}(P(Z_{n+1} = k|Z_1 = 0)p_0 + P(Z_{n+1} = k|Z_1 = 1)p_1 + P(Z_{n+1} = k|Z_1 = 2)p_2)t^k$$

D'où :

$$\phi_{Z_{n+1},1}(t) = p_0\sum_{k=0}^{N}(P(Z_{n+1}=k|Z_1=0)t^k + p_1\sum_{k=0}^{N}(P(Z_{n+1}=k|Z_1=1)t^k + p_2\sum_{k=0}^{N}(P(Z_{n+1}=k|Z_1=2)t^k$$

Or Z_{n+1} avec $Z_1 = i$ suit la même loi que Z_n avec $Z_0 = i$. Donc :

$$\phi_{Z_{n+1},1}(t) = p_0\phi_{Z_n,0}(t) + p_1\phi_{Z_n,1}(t) + p_2\phi_{Z_n,2}(t)$$

(b) Or $\phi_{Z_n,0} = 1, \phi_{Z_n,2} = \phi^2_{Z_n,1}$. D'où :

$$\phi_{Z_{n+1},1} = p_0 + p_1\phi_{Z_n,1} + p_2\phi^2_{Z_n,1}.$$

D'où :

$$\phi_{Z_{n+1},1} = \phi \circ \phi_{Z_n,1}.$$

7. Par récurrence sur n. On pose :

$$P(n) : \phi_{Z_n,1} = \phi^{\star n}.$$

On a $\phi_{Z_0,1}(t) = t$. Donc $\phi_{Z_0,1}$ est l'identité. Donc $P(0)$ est vraie.
Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain n. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a :

$$\phi_{Z_{n+1},1} = \phi \circ \phi_{Z_n,1},$$

d'après la question 5b. En appliquant l'hypothèse de récurrence, il en résulte que :

$$\phi_{Z_{n+1},1} = \phi^{\star n+1}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie. On en déduit, d'après le principe de récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que :

$$\phi_{Z_{n+1},1} = \phi \circ \phi_{Z_n,1}.$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi'_{Z_{n+1},1}(t) = \phi'(\phi_{Z_n,1}(t)).\phi'_{Z_n,1}(t)$$

En particulier,

$$\phi'_{Z_{n+1},1}(1) = \phi'(\phi_{Z_n,1}(1)).\phi'_{Z_n,1}(1)$$

Or : $\phi_X(1) = 1$ et $\phi'_X(1) = E(X)$ pour X une variable aléatoire finie. Donc :

$$E(Z_{n+1}) = \phi'(1)E(Z_n) = mE(Z_n).$$

9. On a : $m = \phi'(1)$ et $E(Z_n) = m^n$. Si $\phi'(1) < 1$, on en déduit que la suite (m^n) tend vers 0. Donc la population est vouée à disparaître.

1.3 Probabilité d'extinction et de survie

On considère la fonction ϕ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2$$

où $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, $p_0 > 0, p_1 > 0, p_2 > 0$.
On cherche à étudier la fonction ϕ.

1. Montrer que $\phi'(1) > 1$ si et seulement si $\frac{p_0}{p_2} < 1$.
2. Déterminer les racines de $\phi(X) - X$.
3. En déduire le signe de $\phi(t) - t$ sur $[0,1]$ en fonction du signe de $\phi'(1) - 1$.
   On suppose désormais que $\phi'(1) > 1$.
4. Déterminer les points fixes de ϕ.
5. Tracer (de manière approximative) le graphe de ϕ ainsi que la droite représentant l'identité sur $[0,1]$. Placer également les points d'intersection.

6. On admet que la probabilité d'extinction de la population est donnée par la limite de la suite définie par :

$$\begin{array}{rcl} & u_0 & = & 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} & = & \phi(u_n) \end{array}$$

   En particulier, on admet que cette suite est convergente. Exprimer cette probabilité en fonction de p_0 et de p_2.
7. En déduire la probabilité de survie de l'espèce.

Correction

1. La fonction ϕ étant un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\phi'(t) = p_1 + 2p_2 t.$$

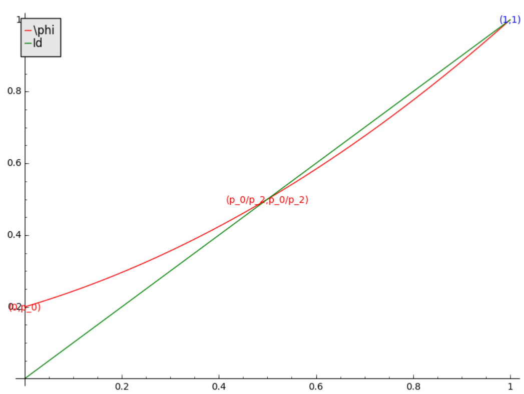
   On a donc :

$$\phi'(1) = 1 - p_0 - p_2 + 2p_2 = 1 - p_0 + p_2.$$

   Donc $\phi'(1) < 1$ si et seulement si $p_2 - p_0 > 0$. Comme $p_2 > 0, p_0 > 0$, cela est équivalent à $\frac{p_0}{p_2} < 1$.
2. On a :

$$\phi(X) - X = p_0 + (p_1 - 1)X + p_2 X^2 = p_0 - (p_0 + p_2)X + p_2 X^2.$$

   Comme $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, on en déduit que 1 est racine de $\phi(X) - X$. L'autre racine est donc donnée par $\frac{p_0}{p_2}$.
3. On sait que $\phi(t) - t$ est négatif si et seulement si $t \in [\frac{p_0}{p_2}, 1]$. (signe de $-p_2 < 0$ entre les racines)
   Cas 1 : $\phi'(1) > 1$. On a alors $\frac{p_0}{p_2} < 1$. D'où :
   — $\phi(t) - t > 0$ si $t \in [0, \frac{p_0}{p_2}[$
   — $\phi(t) - t < 0$ si $t \in]\frac{p_0}{p_2}, 1[$
   — $\phi(t) - t = 0$ si $t \in \{\frac{p_0}{p_2}, 1\}$.
   Cas 2 : $\phi'(1) \leq 1$. On a alors $\frac{p_0}{p_2} \geq 1$. D'où : $\phi(t) - t > 0$ si $t \in [0, 1[$ et $\phi(1) - 1 = 0$.
4. Dans ce cas, les points fixes de ϕ sont $\frac{p_0}{p_2}$ et 1.
5. Graphe :



6. La fonction ϕ étant continue, la suite (u_n) converge vers un point fixe de ϕ, autrement dit $\frac{p_0}{p_2}$ ou 1. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{p_0}{p_2}$. Par récurrence sur n. Cette propriété est vraie pour $n = 0$. On suppose qu'elle est vraie pour n. Comme ϕ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, par hypothèse de récurrence, on a : $u_n \leq \frac{p_0}{p_2}$. D'où, par croissance de ϕ :

$$\phi(u_n) \leq \phi(\frac{p_0}{p_2}) = \frac{p_0}{p_2}.$$

   Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
   Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{p_0}{p_2}$.
   Donc la limite de la suite (u_n) est inférieure ou égale à $\frac{p_0}{p_2}$. La seule limite possible est donc $\frac{p_0}{p_2}$.
7. La probabilité de survie est donc :

$$1 - \frac{p_0}{p_2}.$$

2 Exercice : approximation de $\cos(1)$

On cherche à déterminer une valeur approchée de $\cos(1)$. Pour cela, le résultat suivant sera nécessaire :

$$\forall f \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0; x[, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1}. \tag{1}$$

1. On fixe f une fonction de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et x un réel non nul. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P(n) : \exists \theta \in]0; x[, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

   (a) Montrer que $P(0)$ est vraie.

   (b) Pour montrer que $P(n)$ est vraie, on définit g par :

$$\forall t \in [0; x], g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0) t^k}{k!} - A \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   où A est une constante telle que $g(x) = 0$. Déterminer A.

   (c) Montrer que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, il existe $\theta_k \in]0; x]$ tel que $g^{(k)}(\theta_k) = 0$. On pourra prouver cette proposition par récurrence et à l'aide du théorème de Rolle.

   (d) En déduire que $P(n)$ est vraie. On pourra appliquer le théorème de Rolle à $g^{(n)}$ sur un segment bien choisi.

2. Rappeler la formule du développement limité de $\cos(x)$ à l'ordre $2n$ en 0.
3. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$\cos(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k!} + \frac{\cos^{(2n+1)}(\theta)}{(2n+1)!}.$$

4. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k!}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\cos(1) - S_n| \leq \frac{1}{(2n+1)!}.$$

   En déduire que (S_n) est convergente et sa limite.

5. (INFO) Écrire une fonction python `factoriel(n)` qui prend en argument un entier naturel n et qui retourne $n!$.
6. (INFO) Déduire des résultats précédents une fonction en python `approx(epsilon)` qui prend en argument ϵ et qui retourne une valeur x tel que :

$$|\cos(1) - x| < \epsilon.$$

Correction

1. (a) f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$. En particulier, f est continue sur $[0; x]$ et dérivable sur $]0; x[$. Il existe donc $\theta \in]0; x[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(\theta).$$

   D'où :

$$f(x) = f(0) + f'(\theta)x.$$

   (b) $g(x) = 0$ Donc : $A = \frac{(n+1)!}{x^{n+1}}(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!})$. $(x \neq 0)$.

   (c) On a $\theta_0 = x$. Supposons qu'il existe $\theta_k \in]0; x]$ tel que $g^{(k)}(\theta_k) = 0$. On a :

$$\forall t \in [0; x], g^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - \sum_{i=k}^{n} f^{(i)} \frac{t^{i-k}}{(i-k)!} - A \frac{t^{n+1-k}}{(n+1-k)!}$$

   Donc $g^{(k)}(0) = 0$. Comme $g^{(k)}(\theta_k) = 0$. f étant de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, il en résulte que $f^{(k)}$ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $g^{(k)}$ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ comme somme d'un polynôme avec $f^{(k)}$. En particulier, $g^{(k)}$ est dérivable sur $]0; \theta_k[$ et continue sur $[0; \theta_k]$. On en déduit qu'il existe $\theta_{k+1} \in]0; \theta_k[$ tel que $g^{(k+1)}(\theta_{k+1}) = 0$.
   Par récurrence, on en déduit que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, il existe $\theta_k \in]0; x]$ tel que $g^{(k)}(\theta_k) = 0$.

(d) On a donc : $g^{(n)}(0) = g^{(n)}(\theta_n) = 0$. $g^{(n)}$ étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $\theta_{n+1} \in]0;\theta_n[\subset]0;x[$ tel que :

$$g^{(n+1)}(\theta_{n+1}) = 0$$

Or :

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - A.$$

D'où :

$$f^{(n+1)}(\theta_{n+1}) = A.$$

On a donc :

$$0 = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} - \frac{f^{(n+1)}(\theta_{n+1})x^{n+1}}{(n+1)!}$$

D'où :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\theta_{n+1})x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. On a :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n}).$$

3. En appliquant la formule de la question 1 avec $x = 1$ et à l'ordre $2n$, on en déduit qu'il existe $]0,1[$ tel que :

$$\cos(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k!} + \frac{\cos^{(2n+1)}(\theta)}{(2n+1)!}.$$

4. On a :

$$|\cos(1) - S_n| = |\frac{\cos^{(2n+1)}(\theta)}{(2n+1)!}|$$

Or les dérivées successives de cos sont dans l'ensemble $\{\cos, \sin, -\sin, -\cos\}$. Elles sont donc toutes bornées par 1. D'où :

$$|\cos(1) - S_n| \leq \frac{1}{(2n+1)!}.$$

On a donc :

$$\cos(1) - \frac{1}{(2n+1)!} \leq S_n \leq \cos(1) + \frac{1}{(2n+1)!}$$

Par encadrement, on en déduit que (S_n) converge vers $\cos(1)$.

5.
```
def factoriel(n) :
    resultat=1
    for i in range(1,n+1) :
        resultat=resultat*i
    return resultat
```

6.
```
def approx(epsilon) :
    S=0
    n=0
    while 1/(factoriel(2*n+1)>=epsilon :
        S=S+(-1)**n/(factoriel(2*n)
        n=n+1
    return S
```