Devoir surveillé 9 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

---

1 Problème : Analyse

Dans ce problème, a est un réel strictement positif, f désigne une fonction définie sur $[0, a]$, à valeurs réelles, continue et strictement croissante sur le **segment** $[0, a]$, dérivable dans l'intervalle **ouvert** $]0, a[$ et s'annulant en 0. On rappelle qu'alors la fonction f réalise une bijection de $[0, a]$ vers $[0, f(a)]$ et admet une réciproque que l'on note g.

La fonction g est alors caractérisée par

$$\forall x \in [0, a], \forall y \in [0, f(a)], f(x) = y \Leftrightarrow x = g(y).$$

1.1 Une identité remarquable

On cherche à démontrer dans la première partie l'identité suivante :

$$\forall \alpha \in [0, a], \int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy = \alpha f(\alpha). \tag{E}$$

1. Justifier que l'on a $g(0) = 0$.
2. Exemple : on considère $f(x) = x^p$ avec $p > 0$. Vérifier l'identité (E).
3. On revient au cas général. Pour tout $\alpha \in [0, a]$, on pose :

$$\phi(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy - \alpha f(\alpha)$$

   (a) Exprimer la fonction ϕ à l'aide de f et de primitives de f et de g.
   (b) En déduire que ϕ est continue sur $[0, a]$.
4. Montrer que ϕ est dérivable sur $]0, a[$, de dérivée nulle sur $]0, a[$, et en déduire que ϕ est constante sur $[0, a]$.
5. Vérifier que $\phi(0) = 0$ et en déduire l'identité (E).

1.2 Un calcul d'intégrale

Dans la suite, on cherche à calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx$.

1. On définit le polynôme P par $P(X) = X^4 + 1$. Montrer que :

$$P(X) = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$$

   Dans la suite, on admettra l'identité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\right) \tag{1}$$

2. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}dx.$$

   On pourra utiliser un changement de variable du type $u = -x$.

3. En déduire que
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$
On pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{2}x - 1$ et la formule
$$\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}.$$

4. Dans cette question, f_0 désigne la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f_0(x) = \sqrt{\tan(x)}$.
   (a) Montrer que f_0 est strictement croissante et continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{4}[$. Justifier de l'existence de f_0^{-1} et donner l'expression de cette fonction réciproque.
   (b) Calculer $\int_0^1 \arctan(y^2)dy$ à l'aide d'une intégration par parties.
   (c) En utilisant (E) et la question 4b, donner la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx$.

2 Problème : algèbre

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ avec
$$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1).$$
Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ dont les matrices dans la base B sont respectivement
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1 Un changement de bases

On considère la famille $C = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ avec
$$v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,-1,1,-1), v_3 = (1,0,-1,0), v_4 = (0,1,0,-1).$$

1. On note $P = mat_B(C)$ la matrice de la famille C dans la base B. Montrer que P est inversible, en déduire que C est une base de $\mathbb{R}^4$ et déterminer la matrice $mat_C(B)$.
2. Représenter les matrices f et g dans la base C. On notera respectivement ces matrices J' et K'. (Indication : on pourra éventuellement calculer pour tout $i \in \{1,2,3,4\}, f(v_i), g(v_i)$ et exprimer ces vecteurs dans la base C).

2.2 Une famille de matrices

On pose E le sous-ensemble des matrices carrées réelles de taille 4 défini par
$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1. Exprimer $M(a,b)$ en fonction de J et de K.
2. Montrer que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E. On pourra utiliser la précédente décomposition et calculer J^2, JK, KJ, K^2 éventuellement à l'aide de J' et de K'.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$M(a,b)^n = M(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n).$$

2.3 Une application en probabilités

On considère le damier suivant :

B_2	N_1	B_3
N_4	B_1	N_2
B_4	N_3	B_5

La lettre B désigne une case blanche, tandis que la lettre N désigne une case noire.

Un pion se déplace avec équiprobabilité sur ce damier de la case où il se trouve vers une des cases ayant un côté commun avec sa case de départ. Par exemple, si le pion est situé en N_2, il peut se déplacer en B_1, B_3, B_5 avec des probabilités égales. On suppose qu'au départ, le pion est situé sur une case blanche.

1. Où peut se trouver le pion après un nombre pair de déplacements ? Après un nombre impair de déplacements ?

   On pose maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}, V_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \\ p_{5,n} \end{pmatrix}$ où pour $k \in [|1,5|]$, $p_{k,n}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_k après le $(2n)^{\text{e}}$ déplacement si $n \neq 0$ et $p_{k,0}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_k au départ. On note $B_{k,n}$ l'événement "le pion est sur la case B_k après $(2n)^{\text{e}}$ déplacement".

   De même, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star, W_n = \begin{pmatrix} q_{1,n} \\ q_{2,n} \\ q_{3,n} \\ q_{4,n} \end{pmatrix}$ où pour $k \in [|1,4|]$, $q_{k,n}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case N_k après le $(2n-1)^{\text{e}}$ déplacement si $n \neq 0$. On note $N_{k,n}$ l'événement "le pion est sur la case N_k après $(2n-1)^{\text{e}}$ déplacement".
2. Exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $(p_{k,n})_{1\leq k\leq 5}$ en fonction de $(q_{k,n})_{1\leq k\leq 4}$, puis $(q_{k,n})_{1\leq k\leq 4}$ en fonction de $(p_{k,n-1})_{1\leq k\leq 5}$. En déduire deux matrices A et B telles que :

$$A \in M_{4,5}(\mathbb{R}), B \in M_{5,4}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}^\star, W_n = AV_{n-1}, V_n = BW_n.$$

3. Calculer AB et montrer que AB est un élément de E.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, (AB)^n = M(\frac{1}{4}, \frac{1}{2\times 3^n})$.
5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, établir une relation entre W_n et W_1.
6. En supposant que le pion est initialement placé en B_3, déterminer la probabilité qu'après 9 déplacements, il soit situé en case N_2.

3 Exercice : Équations différentielles

On cherche à résoudre des équations différentielles de la forme :

$$y" + 2y' - 3y = f$$

où f est une fonction que l'on précisera.

1. Déterminer l'ensemble des fonctions solutions à valeurs réelles pour $f = 0$.
2. Déterminer une solution de la forme $x \mapsto \lambda x e^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ pour $f(x) = e^x$.
3. Déterminer une solution de la forme $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ pour $f(x) = \sin(x)$.
4. En déduire une solution pour $f(x) = e^x + \sin(x)$.