Devoir surveillé 9 mathématiques

BCPST 1 2015-2016

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

---

1 Problème : Analyse

Dans ce problème, a est un réel strictement positif, f désigne une fonction définie sur $[0, a]$, à valeurs réelles, continue et strictement croissante sur le **segment** $[0, a]$, dérivable dans l'intervalle **ouvert** $]0, a[$ et s'annulant en 0. On rappelle qu'alors la fonction f réalise une bijection de $[0, a]$ vers $[0, f(a)]$ et admet une réciproque que l'on note g.

La fonction g est alors caractérisée par

$$\forall x \in [0, a], \forall y \in [0, f(a)], f(x) = y \Leftrightarrow x = g(y).$$

1.1 Une identité remarquable

On cherche à démontrer dans la première partie l'identité suivante :

$$\forall \alpha \in [0, a], \int_0^{\alpha} f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy = \alpha f(\alpha). \tag{E}$$

1. Justifier que l'on a $g(0) = 0$.
2. Exemple : on considère $f(x) = x^p$ avec $p > 0$. Vérifier l'identité (E).
3. On revient au cas général. Pour tout $\alpha \in [0, a]$, on pose :

$$\phi(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy - \alpha f(\alpha)$$

   (a) Exprimer la fonction ϕ à l'aide de f et de primitives de f et de g.
   (b) En déduire que ϕ est continue sur $[0, a]$.
4. Montrer que ϕ est dérivable sur $]0, a[$, de dérivée nulle sur $]0, a[$, et en déduire que ϕ est constante sur $[0, a]$.
5. Vérifier que $\phi(0) = 0$ et en déduire l'identité (E).

Correction

1. g est la réciproque de f. Or on a $f(0) = 0$. Il en résulte que $g(0) = 0$.
2. Rappelons que la fonction réciproque g est définie par $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$ qui est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ car $p > 0$. Soit $\alpha \in [0, a]$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\alpha} f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy &= \int_0^{\alpha} x^p dx + \int_0^{f(\alpha)} x^{\frac{1}{p}} dx \\
&= \frac{\alpha^{p+1}}{p+1} + \frac{p}{p+1} (\alpha^p)^{\frac{p+1}{p}} \\
&= \frac{1+p}{1+p} \alpha^{p+1} \\
&= \alpha \alpha^p \\
&= \alpha f(\alpha)
\end{aligned}$$

3. On revient au cas général. Pour tout $\alpha \in [0,a]$, on pose :

$$\phi(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy - \alpha f(\alpha)$$

   (a) f étant continue sur $[0,a]$, elle admet une unique primitive sur $[0,a]$ nulle en 0 que l'on note F. g étant continue sur $[0,f(a)]$, elle admet une primitive sur $[0,f(a)]$ nulle en 0 que l'on note G. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$\int_0^\alpha f(x)dx = F(\alpha), \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy = G(f(\alpha)).$$

   Donc :

$$\phi(\alpha) = F(\alpha) + G(f(\alpha)) - \alpha f(\alpha).$$

   (b) Les fonctions F et G étant des primitives de fonctions continues respectivement sur $[0,a]$ et sur $[0,f(a)]$, on en déduit qu'elles sont de classe C^1 respectivement sur $[0,a]$ et sur $[0,f(a)]$. À fortiori, elles sont continues sur leur domaine de définition. La fonction $G \circ f$ est continue sur $[0,a]$ comme composée de fonction continue ($f([0,a]) \subset [0,f(a)]$). La fonction $\alpha \mapsto -\alpha$ est continue sur $[0,a]$ car polynomiale. Il en résulte que ϕ est continue sur $[0,a]$ comme somme et produit de fonctions continues sur $[0,a]$.

4. On a vu que F et G sont C^1 respectivement sur $[0,a]$ et sur $[0,f(a)]$. Par hypothèse, f est dérivable sur $]0,a[$. On en déduit que $G \circ f$ est dérivable sur $]0,a[$. De la même manière que précédemment, on en déduit que ϕ est dérivable sur $]0,a[$ comme somme et produit de fonction dérivable sur $]0,\alpha[$.
   Calculons ϕ'. On a :

$$\begin{array}{lll} \forall \alpha \in]0,a[, \quad \phi'(\alpha) & = & f(\alpha) + f'(\alpha)g(f(\alpha)) - f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) \\ & = & f(\alpha) + f'(\alpha)\alpha - f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) \qquad (g \text{ réciproque de } f) \\ & = & 0 \end{array}$$

   La fonction ϕ est donc constante sur $]0,a[$, notons cette constante c. Or ϕ est continue sur $[0,a]$. Donc :

$$\lim_{x\to 0, x>0} \phi(x) = \phi(0), \lim_{x \to 0, x<a} \phi(x) = \phi(a).$$

   Or $\lim_{x\to 0,x>0} \phi(x) = c$ et $\lim_{x\to 0,x<a} \phi(x) = c$. Donc ϕ est constante sur $[0,a]$.

5. On a :

$$\phi(0) = \int_0^0 f(x)dx + \int_0^0 g(x)dx - 0f(0) = 0.$$

   ϕ étant constante, on en déduit que :

$$\forall \alpha \in [0,a], \phi(\alpha) = 0$$

   Autrement dit :

$$\forall \alpha \in [0,a] \int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(x)dx = \alpha f(\alpha).$$

   On a bien démontré l'identité (E).

1.2 Un calcul d'intégrale

Dans la suite, on cherche à calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx$.

1. On définit le polynôme P par $P(X) = X^4 + 1$. Montrer que :

$$P(X) = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$$

   Dans la suite, on admettra l'identité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\right) \tag{1}$$

2. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}dx.$$

   On pourra utiliser un changement de variable du type $u = -x$.

3. En déduire que
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$
On pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{2}x - 1$ et la formule
$$\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}.$$

4. Dans cette question, f_0 désigne la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f_0(x) = \sqrt{\tan(x)}$.
   (a) Montrer que f_0 est strictement croissante et continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{4}[$. Justifier de l'existence de f_0^{-1} et donner l'expression de cette fonction réciproque.
   (b) Calculer $\int_0^1 \arctan(y^2)dy$ à l'aide d'une intégration par parties.
   (c) En utilisant (E) et la question 4b, donner la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx$.

Correction

1. Développons $(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1) = (X^2+1+\sqrt{2}X)(X^2+1-\sqrt{2}X)$. On a donc :
$$\begin{array}{rcl} (X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1) & = & (X^2+1)^2 - 2X^2 \\ & = & X^4+2X^2+1-2X^2 \\ & = & X^4+1 \\ & = & P(X) \end{array}$$
.

2. D'après l'identité (1), on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right).$$
Ces fonctions étant des quotients de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, elles sont donc continues sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0,1]$. En intégrant sur $[0,1]$ et par linéarité, on a alors :
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\int_0^1 \frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\right). \quad (2)$$
Montrons que $\int_0^1 \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx = -\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$. Posons $u = -x$, la fonction étant affine, elle est C^1 sur $[0,1]$ et sa dérivée ne s'annule pas sur ce segment. On a :
$$u = -dx, du = -dx,$$
d'où :
$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx = \int_0^{-1} \frac{-u}{u^2-\sqrt{2}u+1}(-du),$$
donc :
$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx = \int_0^{-1} \frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1} - du).$$
On a bien :
$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx = -\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx.$$
En remplaçant dans (2) :
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\int_0^1 \frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx + \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right).$$
Par la relation de Chasles, on obtient :
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx.$$

3. Calculons $J=\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx$. Posons

$$u=\sqrt{2}x-1, du=\sqrt{2}dx$$

La fonction affine, la fonction est de classe C^1 sur $[0,1]$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $[0,1]$. On peut donc effectuer le changement de variable. On a alors :

$$J=\int_{-1-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-1}\frac{\left(\frac{u+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{u+1}{\sqrt{2}}\right)^2-u}\frac{dx}{\sqrt{2}}.$$

En simplifiant, on a :

$$J=\int_{-1-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-1}\frac{u+1}{u^2+1}du.$$

En déterminant une primitive, on en déduit que :

$$J=\left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)+\arctan(u)\right]_{u=-1-\sqrt{2}}^{u=-1+\sqrt{2}}.$$

Donc :

$$J=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+(-1+\sqrt{2})^2}{1+(-1-\sqrt{2})^2}\right)+\arctan(-1+\sqrt{2})-\arctan(-1-\sqrt{2})$$

Donc :

$$J=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+1-2\sqrt{2}+2}{1+1+2\sqrt{2}+2}\right)+\arctan(-1+\sqrt{2})+\arctan(1+\sqrt{2}).$$

Or :

$$\begin{aligned}\ln\left(\tfrac{1+1-2\sqrt{2}+2}{1+1+2\sqrt{2}+2}\right) &= \ln\left(\tfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)\\ &= \ln\left(\tfrac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\right)\\ &= \ln\left(\tfrac{6-4\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

Et :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$$

Comme $\sqrt{2}+1>0$, on en déduit que :

$$\arctan(1+\sqrt{2})+\arctan(\sqrt{2}-1)=\frac{\pi}{2}.$$

Donc :

$$J=\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}$$

Or :

$$\int_0^1\frac{x^2}{x^4+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{4}J.$$

Donc :

$$\int_0^1\frac{x^2}{x^4+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3-2\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

4. Dans cette question, f_0 désigne la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par $f_0(x)=\sqrt{\tan(x)}$.
   (a) f_0 est la composée de la fonction tan qui est continue sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ avec la fonction racine qui est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\tan([0,\frac{\pi}{4}]=[0,1]\subset\mathbb{R}^+$. Donc f_0 est continue sur $[0,\frac{\pi}{4}]$.
   f_0 est la composée de deux fonctions strictement croissantes sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ elle est donc strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{4}$.
   De même, comme la fonction tan est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{4}[$ et que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\tan(]0,\frac{\pi}{4}[)=]0,1[\subset\mathbb{R}^{+\star}$. Donc f_0 est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{4}[$.

f_0 est strictement croissante et continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. D'après le théorème de la bijection continue, f_0 réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ vers $[0,1]$ et la réciproque f_0^{-1} est continue sur $[0,1]$.
Donnons une expression de f_0^{-1}. Soient $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et $y \in [0,1]$ tels que :

$$\begin{array}{llll} & \sqrt{\tan(x)} & = & y \\ \Leftrightarrow & \tan(x) & = & y^2 & \tan(x) \geq 0 \text{ car } x \in [0, \frac{\pi}{4}], y \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x & = & \arctan(y^2) & x \in [0, \frac{\pi}{4}] \end{array}$$

On en déduit que :

$$\forall y \in [0,1], f_0^{-1}(y) = \arctan(y^2).$$

(b) Calculons $K = \int_0^1 \arctan(y^2)dy$. La fonction $v : y \mapsto \arctan(y^2)$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ comme composée de fonction de classe C^1. La fonction $u : y \mapsto 1$ est clairement continue sur $[0,1]$. En intégrant par partie, on a :

$$K = \left[y \arctan(y^2)\right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{2y^2}{y^4+1}dy$$

Donc :

$$K = \frac{\pi}{4} - 2\int_0^1 \frac{y^2}{y^4+1}dy$$

Or d'après la question 3 :

$$\int_0^1 \frac{y^2}{y^4+1}dy = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

D'où :

$$K = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln(3-2\sqrt{2}) + \pi\right).$$

(c) On sait que f_0 est strictement croissante et continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{4}[$. En appliquant l'identité (E), on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx + \int_0^1 \arctan(y^2)dy = \frac{\pi}{4}\tan(\frac{\pi}{4}).$$

Donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \arctan(y^2)dy$$

Or $\int_0^1 \arctan(y^2)dy = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln(3-2\sqrt{2}) + \pi\right)$. Donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln(3-2\sqrt{2}) + \pi\right).$$

2 Problème : algèbre

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ avec

$$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1).$$

Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ dont les matrices dans la base B sont respectivement

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1 Un changement de bases

On considère la famille $C = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ avec

$$v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,-1,1,-1), v_3 = (1,0,-1,0), v_4 = (0,1,0,-1).$$

1. On note $P = mat_B(C)$ la matrice de la famille C dans la base B. Montrer que P est inversible, en déduire que C est une base de $\mathbb{R}^4$ et déterminer la matrice $mat_C(B)$.

2. Représenter les matrices f et g dans la base C. On notera respectivement ces matrices J' et K'. (Indication : on pourra éventuellement calculer pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}, f(v_i), g(v_i)$ et exprimer ces vecteurs dans la base C).

Correction

1. Représentons la matrice P. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrons que la matrice P est inversible à l'aide de l'algorithme du pivot. Ainsi, on en déduit aussi que la famille C est de rang 4. Or une famille de rang 4 de $\mathbb{R}^4$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Donc C est aussi une base de $\mathbb{R}^4$. On a tout d'abord :

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

En appliquant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient :

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

En appliquant $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$, on a :

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$L_4 \leftarrow \frac{-1}{2} L_4, L_3 \leftarrow \frac{-1}{2} L_3$:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{array}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_3 - L_4$:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{array}$$

$L_2 \leftarrow \frac{-1}{2} L_2$:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{array}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3$:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{array}$$

On en déduit que P est inversible et :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$mat_C(B) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. En calculant JP, on en déduit que :

$$mat_{C,B}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En calculant $J' = P^{-1}JP$, on a donc :

$$J' = mat_C(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De même, en calculant KP, on en déduit que :

$$mat_{C,B}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour $K' = P^{-1}KP$, on a alors :

$$K' = mat_C(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2 Une famille de matrices

On pose E le sous-ensemble des matrices carrées réelles de taille 4 défini par

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1. Exprimer $M(a,b)$ en fonction de J et de K.
2. Montrer que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E. On pourra utiliser la précédente décomposition et calculer J^2, JK, KJ, K^2 éventuellement à l'aide de J' et de K'.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$M(a,b)^n = M(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n).$$

Correction

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$M(a,b) = aJ + bK.$$

2. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(c,d) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$M(a,b)M(c,d) = (aJ + bK)(cJ + dK) = acJ^2 + adJK + bcKJ + bdK^2.$$

Or :

$$J^2 = 4J, JK = KJ = (0)_4, K^2 = 2K.$$

Donc :

$$M(a,b)M(c,d) = 4acJ + 2bdK = M(4ac, 2bd) \in E.$$

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$P(n) : M(a,b)^n = M(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n).$$

Il est clair que $P(1)$ est vraie. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain n. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a :

$$M(a,b)^{n+1} = M(a,b)^n M(a,b).$$

Par hypothèse de récurrence,

$$M(a,b)^{n+1} = M(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n)M(a,b).$$

Or, on sait que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (c,d) \in \mathbb{R}^2, M(a,b)M(c,d) = M(4ac, 2bd).$$

Donc :

$$M(a,b)^{n+1} = M(4 \cdot 4^{n-1}a^n a, 2 \cdot 2^{n-1}b^n b) = M(4^n a^{n+1}, 2^n b^{n+1}).$$

Donc $P(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

2.3 Une application en probabilités

On considère le damier suivant :

B_2	N_1	B_3
N_4	B_1	N_2
B_4	N_3	B_5

La lettre B désigne une case blanche, tandis que la lettre N désigne une case noire.

Un pion se déplace avec équiprobabilité sur ce damier de la case où il se trouve vers une des cases ayant un côté commun avec sa case de départ. Par exemple, si le pion est situé en N_2, il peut se déplacer en B_1, B_3, B_5 avec des probabilités égales. On suppose qu'au départ, le pion est situé sur une case blanche.

1. Où peut se trouver le pion après un nombre pair de déplacements ? Après un nombre impair de déplacements ?

On pose maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}, V_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \\ p_{5,n} \end{pmatrix}$ où pour $k \in [|1,5|]$, $p_{k,n}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_k après le $(2n)^{\text{e}}$ déplacement si $n \neq 0$ et $p_{k,0}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_k au départ. On note $B_{k,n}$ l'événement “le pion est sur la case B_k après $(2n)^{\text{e}}$ déplacement”.

De même, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star, W_n = \begin{pmatrix} q_{1,n} \\ q_{2,n} \\ q_{3,n} \\ q_{4,n} \end{pmatrix}$ où pour $k \in [|1,4|]$, $q_{k,n}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case N_k après le $(2n-1)^{\text{e}}$ déplacement si $n \neq 0$. On note $N_{k,n}$ l'événement “le pion est sur la case N_k après $(2n-1)^{\text{e}}$ déplacement”.

2. Exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $(p_{k,n})_{1\leq k\leq 5}$ en fonction de $(q_{k,n})_{1\leq k\leq 4}$, puis $(q_{k,n})_{1\leq k\leq 4}$ en fonction de $(p_{k,n-1})_{1\leq k\leq 5}$. En déduire deux matrices A et B telles que :

$$A \in M_{4,5}(\mathbb{R}), B \in M_{5,4}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}^\star, W_n = AV_{n-1}, V_n = BW_n.$$

3. Calculer AB et montrer que AB est un élément de E.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, (AB)^n = M(\frac{1}{4}, \frac{1}{2\times 3^n})$.

5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, établir une relation entre W_n et W_1.
6. En supposant que le pion est initialement placé en B_3, déterminer la probabilité qu'après 9 déplacements, il soit situé en case N_2.

Correction

1. On constate que les cases adjacentes à une case noire sont blanches, et que les cases adjacentes à une case blanches sont noires. On en déduit qu'après un nombre pair de déplacements de déplacement, le pion se trouve sur une case blanche, tandis qu'après un nombre impair de déplacement, le pion se trouve sur une case noire.
2. Considérons le système complet d'événements $(N_{i,n})_{1\leq i\leq 4}$. Pour tout $k \in \{1,2,3,4,5\}$, on a :

$$p_{k,n} = \sum_{i=1}^{4} P(B_k|N_{i,n})P(N_{i,n})$$

On a donc :

$$p_{k,n} = \sum_{i=1}^{4} P(B_k|N_{i,n})q_{i,n}$$

Or les probabilités $P(B_k|N_{i,n})$ se calculent de la manière suivante : on suppose que le pion est à la case N_i et on détermine la probabilité qu'il se déplace à la case B_k. On a donc :

$$\begin{array}{lcllll} p_{1,n} & = & \frac{1}{3}q_{1,n}+ & \frac{1}{3}q_{2,n}+ & \frac{1}{3}q_{3,n}+ & \frac{1}{3}q_{4,n} \\ p_{2,n} & = & \frac{1}{3}q_{1,n}+ & & & \frac{1}{3}q_{4,n} \\ p_{3,n} & = & \frac{1}{3}q_{1,n}+ & \frac{1}{3}q_{2,n} & & \\ p_{4,n} & = & & & \frac{1}{3}q_{3,n}+ & \frac{1}{3}q_{4,n} \\ p_{5,n} & = & & \frac{1}{3}q_{2,n}+ & \frac{1}{3}q_{3,n} & \end{array}$$

On a donc :

$$V_n = BW_n,$$

avec $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De même, en considérant le système complet d'événements $(B_{i,n-1})_{1\leq i\leq 5}$, on a :

$$\forall k \in \{1,\cdots,4\}, q_{k,n} = \sum_{i=1}^{5} P(N_k|B_{i,n-1})P(B_{i,n-1}).$$

En remplaçant, on a alors :

$$\begin{array}{lcllll} q_{1,n} & = & \frac{1}{4}p_{1,n-1}+ & \frac{1}{2}p_{2,n-1}+ & \frac{1}{2}p_{3,n-1} & & \\ q_{2,n} & = & \frac{1}{4}p_{1,n-1}+ & & \frac{1}{2}p_{3,n-1}+ & & \frac{1}{2}p_{5,n-1} \\ q_{3,n} & = & \frac{1}{4}p_{1,n-1}+ & & & \frac{1}{2}p_{4,n-1}+ & \frac{1}{2}p_{5,n-1} \\ q_{4,n} & = & \frac{1}{4}p_{1,n-1}+ & \frac{1}{2}p_{2,n-1}+ & & \frac{1}{2}p_{4,n-1} & \end{array}$$

Donc :

$$W_n = AV_{n-1},$$

où $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3. On a :

$$AB = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Pour que AB soit de la forme $M(a,b)$, nécessairement, $a = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ et $b = a - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$. Or, en calculant on a :

$$M(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}) = AB.$$

Donc AB est bien un élément de E.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On sait que $(AB)^1 = M(\frac{1}{4}, \frac{1}{6})$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a,b)^n = M(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n)$. Donc :
$$(AB)^n = M(4^{n-1}\frac{1}{4^n}, 2^{n-1}\frac{1}{2^n 3^n}) = M(\frac{1}{4}, \frac{1}{2.3^n}).$$
5. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star, W_n = (AB)^{n-1}W_1$.
Pour $n = 1$, on a bien $W_1 = W_1$. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n > 1$. On sait que $W_{n+1} = AV_n$. Or $V_n = BW_n$. Donc :
$$W_{n+1} = ABW_n$$
Par hypothèse de récurrence, on en déduit que
$$W_{n+1} = (AB)(AB)^{n-1}W_1.$$
Donc :
$$W_{n+1} = (AB)^n W_1.$$
Donc $P(n+1)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence, on en déduit que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, W_n = (AB)^{n-1}W_1.$$
6. Étant initialement posé en B_3, on en déduit que $W_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour 9 déplacements, on a $9 = 2 \cdot 5 - 1$.
Donc $n = 5$. On cherche à calculer $q_{2,5}$ qui est la probabilité que le pion se trouve en N_2 après 9 déplacements. On peut l'obtenir en calculant W_5. Or :
$$W_5 = (AB)^4 W_1 = M(\frac{1}{4}, \frac{1}{162})W_1$$
Constatons que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$M(a,b)W_1 = \begin{pmatrix} a + \frac{b}{2} \\ a + \frac{b}{2} \\ a - \frac{b}{2} \\ a - \frac{b}{2} \end{pmatrix}$$
Or $p_{2,5}$ est égal à la deuxième composante de ce vecteur. On a donc :
$$p_{2,5} = a + \frac{b}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4.3^4} = \frac{3^4+1}{4.3^4} = \frac{41}{162}.$$

3 Exercice : Équations différentielles

On cherche à résoudre des équations différentielles de la forme :

$$y" + 2y' - 3y = f$$

où f est une fonction que l'on précisera.

1. Déterminer l'ensemble des fonctions solutions à valeurs réelles pour $f = 0$.
2. Déterminer une solution de la forme $x \mapsto \lambda x e^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ pour $f(x) = e^x$.
3. Déterminer une solution de la forme $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ pour $f(x) = \sin(x)$.
4. En déduire une solution pour $f(x) = e^x + \sin(x)$.

Correction

1. On reconnaît une équation différentielle différentielle homogène linéaire à coefficients constants d'ordre 2. Pour déterminer les solutions, on cherche les racines de l'équation caractéristique. On a :

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

1 est racine évidente. Par produit des racine, on en déduit que la deuxième racine est -3. Les fonctions solutions sont donc les fonctions définies par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ae^x + B^{-3x} \end{array}$$

où A et B sont des réels.

2. On cherche une solution g de la forme $g(x) = \lambda x e^x$. Calculons g' et g". On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \lambda e^x + \lambda x e^x, g\text{"}(x) = 2\lambda e^x + \lambda x e^x.$$

g alors solution si et seulement si :

$$e^x = 4\lambda e^x.$$

Autrement dit $\lambda = \frac{1}{4}$.

3. On cherche une solution de la forme $g(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. On a :

$$g'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x), g\text{"}(x) = -A\cos(x) - B\sin(x) = -g(x).$$

g est solution si et seulement si :

$$\sin(x) = (-4A + 2B)\cos(x) + (-2A - 4B)\sin(x).$$

Une solution est alors obtenue en résolvant le système :

$$-4A + 2B = 0, -2A - 4B = 1.$$

Donc :

$$A = \frac{-1}{10}, B = \frac{-1}{5}.$$

La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{10}(-\cos(x) - 2\sin(x))$ est donc solution de l'équation.

4. Par le principe de superposition des solutions, on en déduit qu'une solution est donnée par :

$$x \mapsto \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{10}(-\cos(x) - 2\sin(x)).$$