Devoir surveillé 1 mathématiques

BCPST 1 2016-2017

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = 0^3 + 1^3 + \cdots + n^3 \text{ et } T_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

1. Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 et T_0, T_1, T_2, T_3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle relation conjecturez-vous entre S_n et T_n ?
3. Démontrer votre conjecture par récurrence.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2\sqrt{x+1}. \tag{1}$$

2. On pose :

$$\forall n \geq 1, S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Exercice 3. On définit la fonction ϵ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccll} \epsilon : & \mathbb{R} & \to & \{-1, 0, 1\} & \\ & x & \mapsto & 1 & \text{si } x > 0 \\ & & & -1 & \text{si } x < 0 \\ & & & 0 & \text{si } x = 0 \end{array}$$

1. Soient x, y deux réels. Montrer que $\epsilon(xy) = \epsilon(x)\epsilon(y)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $|x| = \epsilon(x)x$.
3. À l'aide des deux questions précédentes, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |xy| = |x||y|.$$

Exercice 4. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, en fonction du paramètre réel a :

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a. \tag{E}$$

Exercice 5. On constate que l'on a

$$1^2 = \frac{1.2.3}{6},\ 1^2 + 3^2 = \frac{3.4.5}{6},\ 1^2 + 3^2 + 5^2 = \frac{5.6.7}{6}.$$

Conjecturer une généralisation de ces identités et la démontrer.

Exercice 6. Déterminer les solutions du système d'inconnues réelles x et y

$$\left\{ \begin{array}{lcl} |x| + |y| & = & 4 \\ |xy| & = & 1 \end{array} \right. \tag{2}$$

Exercice 7. On cherche à démontrer l'inégalité triangulaire sur les nombres complexes avec une preuve différente.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) \leq |z|$, avec égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}^+$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z + \overline{z} = 2\Re(z)$.
3. Montrer que pour tout z, z' complexes, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
4. Montrer que pour tout z, z' complexes, $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$.
5. Montrer que pour tout z, z' complexes $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\overline{z'}) + |z|^2$.
6. Déduire des propositions précédentes l'inégalité triangulaire.
7. Montrer qu'il y a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z\overline{z'} = \lambda$.