Devoir surveillé 1 mathématiques

BCPST 1 2016-2017

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = 0^3 + 1^3 + \cdots + n^3 \text{ et } T_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

1. Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 et T_0, T_1, T_2, T_3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle relation conjecturez-vous entre S_n et T_n ?
3. Démontrer votre conjecture par récurrence.

Correction

1. On a : $S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 9, S_3 = 36$ et $T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = 9, T_3 = \left(\frac{3(3+1)}{2}\right)^2 = 36$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il semble que l'on ait $S_n = T_n$.
3. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : S_n = T_n.$$
Montrons cette proposition par récurrence.
   — Initialisation : on a $S_0 = 0$ et $T_0 = 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
   — Hérédité : on suppose que $P(n)$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
   Par définition, on a :
   $$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3.$$
   Or $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ($P(n)$ vraie).
   Donc :
   $$S_{n+1} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3.$$
   En factorisant par $\left(\frac{(n+1)}{2}\right)^2$, on a donc
   $$\begin{aligned} S_{n+1} &= \left(\tfrac{n+1}{2}\right)^2 \left(n^2 + 4(n+1)\right) \\ &= \left(\tfrac{n+1}{2}\right)^2 \left(n^2 + 4n + 4\right) \\ &= \left(\tfrac{n+1}{2}\right)^2 (n+2)^2 \\ &= \left(\tfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$
   $P(n+1)$ est donc vraie.
   — Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = T_n$.

Exercice 2. 1. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2\sqrt{x+1}. \tag{1}$$

2. On pose :

$$\forall n \geq 1, S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Correction

1. Soit $x > 0$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{rcll} 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2\sqrt{x+1} & \Leftrightarrow & 2x+1 > 2\sqrt{x+1}\sqrt{x} & (\sqrt{x} > 0) \\ & \Leftrightarrow & (2x+1)^2 > x(x+1) \text{ et } 2x+1 > 0, x > 0 & (\text{fonction carrée strictement croissante sur } \mathbb{R}^+) \\ & \Leftrightarrow & 4x^2 + 4x + 1 > x^2 + x,\ x > 0 & (\text{si } x > 0 \text{ alors } 2x+1 > 0) \\ & \Leftrightarrow & 3x^2 + 3x + 1 > 0,\ x > 0 & \end{array}$$

On reconnaît une inéquation de degré 2. Calculons le discriminant correspondant :

$$\Delta = 3^2 - 4.3 = -3 < 0.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}, 3x^2 + 3x + 1$ est strictement positif. Il en résulte que la proposition

$$(3x^2 + 3x + 1 > 0,\ x > 0)$$

est vraie. Par équivalence, on en déduit que

$$2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2\sqrt{x+1}.$$

est vraie.

2. On pose

$$\forall n \geq 1, P(n) : 2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $P(n)$ est vraie.

— Initialisation : pour $n = 1$, on a $2\sqrt{n+1} - 2 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right) < 2\frac{1}{2} = 1$, $S_1 = 1$ et $2\sqrt{n} - 1 = 1$. On a bien

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

— Hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 1$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. D'après $P(n)$, on a

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

En ajoutant $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ à ces inégalités, on obtient

$$2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq S_{n+1} \leq 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que

$$2\sqrt{n+2} - 2 \leq 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \tag{2}$$

et

$$2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} - 1. \tag{3}$$

On a

$$2\sqrt{n+2} - 2 \leq 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n+2} \leq \sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Mais $n \geq 1$, donc $n+1 > 0$. D'après la question 1, on en déduit que

$$\sqrt{n+2} \leq \sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Par équivalence, on en déduit que l'inégalité (2) est vraie.

On a

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{n}-1+\tfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}-1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{n}+\tfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1 \leq 2(n+1) \qquad (\text{ car } \sqrt{n+1}>0) \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \leq 2n+1 \\
&\Leftrightarrow \quad 4n(n+1) \leq (2n+1)^2,\ n \geq 1 \qquad (\text{ si } n \geq 1 \text{ alors } n+1 \geq 0 \text{ et } 2n+1 \geq 0 \\
&\qquad\qquad \text{et la } x \mapsto x^2 \text{ est strictement } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}^+) \\
&\Leftrightarrow \quad 4n^2+4n \leq 4n^2+4n+1,\ n \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq 1,\ n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Cette dernière proposition étant vraie. Par équivalence, on en déduit que (3) est donc vraie.
Les inégalités (2) et (3) étant vraies, il en résulte que $P(n+1)$ est vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a

$$2\sqrt{n+1}-2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n}-1.$$

Exercice 3. On définit la fonction ϵ de la manière suivante :

$$
\begin{array}{rccll}
\epsilon: & \mathbb{R} & \to & \{-1,0,1\} & \\
& x & \mapsto & 1 & \text{si } x>0 \\
& & & -1 & \text{si } x<0 \\
& & & 0 & \text{si } x=0
\end{array}
$$

1. Soient x, y deux réels. Montrer que $\epsilon(xy)=\epsilon(x)\epsilon(y)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $|x|=\epsilon(x)x$.
3. À l'aide des deux questions précédentes, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |xy|=|x||y|.$$

Correction

1. Soient x, y deux réels.
   — Cas 1 : $x=0$ ou $y=0$.
   on a alors $\epsilon(xy)=\epsilon(0)=0$. De plus, $\epsilon(x)=0$ ou $\epsilon(y)=0$. Donc $\epsilon(x)\epsilon(y)=0$. On a bien $\epsilon(xy)=\epsilon(x)\epsilon(y)$.
   — Cas 2 : $x>0, y>0$ ou $x<0, y<0$.
   xy est donc strictement positif, d'où $\epsilon(xy)=1$. De plus, $\epsilon(x)\epsilon(y)=1.1$ ou $\epsilon(x)\epsilon(y)=(-1)^2=1$.
   On a bien $\epsilon(xy)=\epsilon(x)\epsilon(y)$.
   — Cas 3 : $x>0, y<0$ ou $x<0, y>0$.
   xy est donc strictement négatif, ce qui donne $\epsilon(xy)=-1$. De plus, $\epsilon(x)\epsilon(y)=1.(-1)=-1$ ou $\epsilon(x)\epsilon(y)=(-1)1=-1$.
   On a bien $\epsilon(xy)=\epsilon(x)\epsilon(y)$.
   Par disjonction de cas, on en conclut que pour tout x, y réels, on a
   $$\epsilon(xy)=\epsilon(x)\epsilon(y).$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   — Cas 1 : $x>0$. On a $|x|=x$ et $\epsilon(x)x=1.x=x$. D'où $|x|=\epsilon(x)x$.
   — Cas 2 : $x<0$. On a $|x|=-x$ et $\epsilon(x)x=-x=-x$. D'où $|x|=\epsilon(x)x$.
   — Cas 3 : $x=0$. On a $|x|=0$ et $\epsilon(x)x=0$. D'où $|x|=\epsilon(x)x$.
   Par disjonction de cas, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}, |x|=\epsilon(x)x$.
3. Soient x, y deux réels. On a
   $$|xy|=\epsilon(xy)xy. \text{ (question 2)}$$
   Or, d'après la question 1, $\epsilon(xy)=\epsilon(x)\epsilon(y)$. Donc
   $$|xy|=\epsilon(x)\epsilon(y)xy$$
   Donc $|xy|=\epsilon(x)x\epsilon(y)y=|x||y|$.
   La proposition est bien démontrée.

Exercice 4. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, en fonction du paramètre réel a :

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a. \tag{E}$$

Correction

L'équation est définie pour $x \geq 0$ et $x \geq -1$. Autrement dit, elle est définie pour $x \geq 0$.

— Cas 1 : $a < 1$. x étant positif, on a donc $\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{x+1} \geq 1$. D'où $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \geq 1$. L'équation (E) n'as donc pas de solution.

— Cas 2 : $a \geq 1$. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a \quad &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^2 = a^2,\ \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \geq 0,\ a \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x + 2\sqrt{x}\sqrt{x+1} + x + 1 = a^2 && \begin{array}{l} a \geq 1 \geq 0 \text{ par hypothèse} \\ \text{et } (\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \geq 0) \text{ est vraie} \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x}\sqrt{x+1} = a^2 - 2x - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 4x(x+1) = (a^2 - 2x - 1)^2,\ a^2 - 2x - 1 \geq 0 && (x \geq 0) \\
&\Leftrightarrow \quad 4x^2 + 4x = 4x^2 + 4x + 1 - 4a^2x - 2a^2 + a^4,\ a^2 - 2x - 1 \geq 0 && (x \geq 0) \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = -4a^2x + 1 - 2a^2 + a^4,\ a^2 - 2x - 1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4a^2x = 1 - 2a^2 + a^4,\ a^2 - 2x - 1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{(a^2-1)^2}{4a^2},\ a^2 - 2x - 1 \geq 0 && (a \neq 0)
\end{aligned}$$

Vérifions que la dernière proposition est vraie lorsque $x = \frac{(a^2-1)^2}{4a^2}$. Dans ce cas, x est le carré du réel $\frac{(a^2-1)}{2a}$. Il est donc positif. On a

$$\begin{aligned}
a^2 - 2x - 1 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{a^2-1}{2} \geq x \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{a^2-1}{2} \geq \tfrac{(a^2-1)^2}{4a^2} && (x = \tfrac{(a^2-1)^2}{4a^2}) \\
&\Leftrightarrow \quad 2a^2(a^2-1) \geq (a^2-1)^2 && (4a^2 > 0) \\
&\Leftrightarrow \quad 2a^2(a^2-1) - (a^2-1)^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (a^2-1)(2a^2 - (a^2-1)) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (a^2-1)(a^2+1) \geq 0
\end{aligned}$$

Or $a \geq 1$, donc $a^2 \geq 1$, d'où $a^2 - 1 \geq 0$. De plus $a^2 + 1$ est positif comme somme de termes positifs. Il en résulte que $(a^2-1)(a^2+1) \geq 0$. Par équivalence, on en déduit que la solution de (E) pour $a \geq 1$ est

$$x = \left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2.$$

Exercice 5. On constate que l'on a

$$1^2 = \frac{1.2.3}{6},\ 1^2 + 3^2 = \frac{3.4.5}{6},\ 1^2 + 3^2 + 5^2 = \frac{5.6.7}{6}.$$

Conjecturer une généralisation de ces identités et la démontrer.

Correction

Pour tout $n \geq 1$, posons :

$$S_n = 1 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2, T_n = \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6}.$$

on constate que $S_1 = T_1$, $S_2 = T_2$, $S_3 = T_3$. On conjecture alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star S_n = T_n.$$

Montrons par récurrence cette proposition.

- Initialisation : pour $n = 1$, on a $S_1 = 1, T_1 = 1$. Donc $S_1 = T_1$.
- Hérédité : on suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $S_n = T_n$. Montrons que $S_{n+1} = T_{n+1}$.
  On a :
  $$S_{n+1} = S_n + (2(n+1)-1)^2 = S_n + (2n+1)^2.$$
  Or $S_n = T_n$ (hypothèse de récurrence). Donc :
  $$S_{n+1} = \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6} + (2n+1)^2.$$
  En factorisant par $\frac{2n+1}{6}$, on obtient
  $$\begin{array}{rcl} S_{n+1} & = & \frac{2n+1}{6}\left(2n(2n-1) + 6(2n+1)\right) \\ & = & \frac{2n+1}{6}\left(4n^2 + 10n + 6\right) \end{array}$$
  Or $(2n+2)(2n+3) = 4n^2 + 6n + 4n + 6 = 4n^2 + 10n + 6$. Donc
  $$S_{n+1} = \frac{2n+1}{6}(2n+2)(2n+3).$$
  Autrement dit, $S_{n+1} = T_{n+1}$.
- Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a $S_n = T_n$.

Exercice 6. Déterminer les solutions du système d'inconnues réelles x et y

$$\left\{ \begin{array}{lcl} |x| + |y| & = & 4 \\ |xy| & = & 1 \end{array} \right. \tag{4}$$

Correction

Posons $u = |x|, v = |y|$. Le système (4) est alors équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u + v & = & 4 \\ uv & = & 1 \end{array} \right. \tag{5}$$

avec $u \geq 0, v \geq 0$. On reconnaît un système somme et produit dont voici l'équation de degré 2 correspondante

$$X^2 - 4X + 1 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 4^2 - 4 = 12$. Les solutions sont donc :

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}, x_2 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

on a bien x_1 et x_2 positifs : le produit est égal à 1 ils sont donc de même signe et la somme est égale à 4. Les solutions de (5) sont donc :

$$(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}), (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}).$$

Revenons au système initial. On a (x, y) solution de (4) si et seulement si

$$|x| = 2 + \sqrt{3}, |y| = 2 - \sqrt{3}$$

ou

$$|x| = 2 - \sqrt{3}, |y| = 2 + \sqrt{3}$$

ce qui donne

$$\left(x = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } x = -2 - \sqrt{3}\right) \text{ et } \left(y = 2 - \sqrt{3} \text{ ou } y = -2 + \sqrt{3}\right)$$

ou

$$\left(x = 2 - \sqrt{3} \text{ ou } x = -2 + \sqrt{3}\right) \text{ et } \left(y = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } y = -2 - \sqrt{3}\right)$$

On en déduit que

$$S = \left\{(x, y) | x \in \{2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\}, y \in \{2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\}\right\} \cup \left\{(x, y) | x \in \{2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\}, y \in \{2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\}\right\}$$

Exercice 7. On cherche à démontrer l'inégalité triangulaire sur les nombres complexes avec une preuve différente.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) \leq |z|$, avec égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}^+$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z + \overline{z} = 2\Re(z)$.
3. Montrer que pour tout z, z' complexes, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
4. Montrer que pour tout z, z' complexes, $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$.
5. Montrer que pour tout z, z' complexes $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\overline{z'}) + |z|^2$.
6. Déduire des propositions précédentes l'inégalité triangulaire.
7. Montrer qu'il y a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z\overline{z'} = \lambda$.

Correction

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. En notant $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, on a
$$a^2 \leq \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (car } b^2 \text{ est positif).}$$
En passant à la racine carrée, on obtient
$$|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$
Or $|a| \geq a$, d'où
$$a \leq |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$
Pour le cas d'égalité, on a :
$$\begin{array}{rcl} a = \sqrt{a^2 + b^2} & \Leftrightarrow & a^2 = a^2 + b^2 \text{ et } a \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & b^2 = 0, a \geq 0 \end{array}$$
Autrement dit, il y a égalité si et seulement si $b = 0$ et a est positif, ce qui signifie que z est un réel positif.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $z = a + ib$ avec a, b des réels. On a :
$$z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\Re(z).$$
l'identité à prouver est donc vraie.
3. Soient z, z' des nombres complexes. On note $z = a + ib, z' = c + id$ avec a, b, c, d réels. On a
$$\overline{z + z'} = a + c - i(b + d) = a - ib + c - id = \overline{z} + \overline{z'}$$
4. Soient z, z' des nombres complexes. On note $z = a + ib, z' = c + id$ avec a, b, c, d réels. On a
$$\begin{array}{rcl} \overline{z}\overline{z'} & = & (a - ib)(c - id) \\ & = & ac - bd - i(bc + ad) \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rcl} \overline{zz'} & = & \overline{(a + ib)(c + id)} \\ & = & \overline{ac - bd + i(bc + ad)} \\ & = & (ac - bd) - i(bc + ad) \end{array}$$
On a bien $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$.
5. Soient z, z' deux nombres complexes. On a
$$\begin{array}{rcl} |z + z'|^2 & = & (z + z')\overline{z + z'} \\ & = & (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) \\ & = & |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} \end{array}$$
Or $\overline{z\overline{z'}} = \overline{z}z'$, donc $z\overline{z'} + z'\overline{z} = 2\Re(z\overline{z'})$.
Il en résulte que
$$|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\Re(z\overline{z'}).$$

6. Soient z, z' des nombres complexes. On a :

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\Re(z\overline{z'}).$$

Or $\Re(z\overline{z'}) \leq |z\overline{z'}|$ d'après la question 1. Donc :

$$|z+z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\overline{z'}|.$$

Or $|z\overline{z'}| = |z||\overline{z'}|$ et $|\overline{z'}| = |z'|$. Donc

$$|z+z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|.$$

Autrement dit,

$$|z+z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2.$$

Or, $|z+z| \geq 0$ et $|z| + |z'| \geq 0$. On a donc :

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|.$$

7. On a :

$$\begin{array}{rcll} |z+z'| = |z| + |z'| & \Leftrightarrow & |z+z'|^2 = (|z| + |z'|)^2 & \text{(les différents termes sont positifs)} \\ & \Leftrightarrow & \Re(z\overline{z'}) = |z\overline{z'}| & \text{mêmes calculs que dans les questions 5 et 6} \\ & \Leftrightarrow & z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+ & \text{(question 1)} \end{array}$$

On a bien $|z+z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+$.