Devoir surveillé 2 mathématiques

BCPST 1 2016-2017

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{C}$, on pose :

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-i)\cdots(x-(n-1)) = \prod_{i=0}^{n-1}(x-i)$$

et $(x)_0 = 1$.

1. Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Montrer que $(x)_n = x(x-1)_{n-1}$.
2. Soient x, y deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Montrer que

$$(x+y)_n = x(x-1+y)_{n-1} + y(x+y-1)_{n-1}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$P(n) : \forall x \in \mathbb{C}, \forall y \in \mathbb{C}, (x+y)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k}.$$

   (a) Montrer que $P(0)$ est vraie.
   (b) On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P(n+1)$ est vraie. On pourra appliquer $P(n)$ avec les couples $(x-1, y)$ et $(x, y-1)$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Exercice 2. 1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin(2\theta)^4 \cos(\theta)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On cherche à résoudre l'équation d'inconnue $x \in]0, 2\pi[$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{-1}{2}. \tag{E}$$

   (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos(a)\sin(b).$$

   (b) À l'aide de la formule précédente et d'un résultat du cours, calculer de deux manières la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left((k+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left((k-\frac{1}{2})x\right)\right).$$

3. En déduire les solutions de (E).
4. On cherche à résoudre l'équation d'inconnue réelle x

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 1. \tag{F}$$

   (a) Montrer qu'il existe $\phi \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que

$$(F) \Leftrightarrow r\cos(x+\phi) = 1$$

   (b) En déduire les solutions de (F).

Exercice 3. Soit $f : E \mapsto F$ une application. Si B est une partie de F, on rappelle que l'image réciproque de B par f est l'ensemble

$$f^-(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}.$$

1. Déterminer $f^-(\emptyset)$.
2. Soient A et B deux sous-ensembles de F. Montrer que $f^-(A \cap B) = f^-(A) \cap f^-(B)$. Comparer $f^-(A \cup B)$ et $f^-(A) \cup f^-(B)$.
3. On suppose que f est surjective. Montrer que
$$\forall B \subset F, f^-(B) = \emptyset \Leftrightarrow B = \emptyset.$$
4. On suppose que f est injective. Soient A et B deux parties de E. Montrer que
$$f(A) \cap f(B) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Exercice 4.
1. Montrer, pour tout $(n, k, i) \in \mathbb{N}^3$, $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}$. On veillera à traiter tous les cas.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}.$$

Exercice 5. On considère l'application ϕ suivante :

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z & \longmapsto & \frac{1}{z}. \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est bijective, et déterminer sa réciproque.
2. On identifie le plan aux nombres complexes. Dans ce cas, le cercle de centre a et de rayon R est :
$$\mathcal{C}(a, R) = \{z \in \mathbb{C} | |z - a| = R\}.$$
Déterminer $\phi(\mathcal{C}(0, 1))$.
3. On fixe $z_0 = a_0 + ib_0$, avec $a_0 \neq 0$ ou $b_0 \neq 0$. Considérons l'ensemble :
$$D_{z_0} = \left\{ z = a + ib \in \mathbb{C}, a_0 a + b_0 b - \frac{1}{2} = 0 \right\}.$$
Montrer que l'image de D_{z_0} par ϕ est égale à $\mathcal{C}(\overline{z_0}, |z_0|) \backslash \{0\}$.
4. En déduire l'image de $\mathcal{C}(z_0, |z_0|) \backslash \{0\}$ par ϕ.

Exercice 6.
1. Justifier que $\cos(\frac{\pi}{6}) = 2\cos(\frac{\pi}{12})^2 - 1$.
2. En déduire que $\cos(\frac{\pi}{12})$ est solution de l'équation
$$2X^2 - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$
3. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes

$$S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (i - j).$$

et

$$T_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i - j).$$