Devoir surveillé 2 mathématiques

BCPST 1 2016-2017

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{C}$, on pose :

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-i)\cdots(x-(n-1)) = \prod_{i=0}^{n-1}(x-i)$$

et $(x)_0 = 1$.

1. Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Montrer que $(x)_n = x(x-1)_{n-1}$.
2. Soient x, y deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Montrer que

$$(x+y)_n = x(x-1+y)_{n-1} + y(x+y-1)_{n-1}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$P(n) : \forall x \in \mathbb{C}, \forall y \in \mathbb{C}, (x+y)_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)_k(y)_{n-k}.$$

   (a) Montrer que $P(0)$ est vraie.
   (b) On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P(n+1)$ est vraie. On pourra appliquer $P(n)$ avec les couples $(x-1, y)$ et $(x, y-1)$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Par définition,

$$(x)_n = \prod_{i=0}^{n-1}(x-i)$$

Donc

$$(x)_n = x\prod_{i=1}^{n-1}(x-i).$$

D'où

$$(x)_n = x\prod_{i=1}^{n-1}(x-1-(i-1))$$

En posant $i' = i-1$, on obtient

$$(x)_n = x\prod_{i'=0}^{n-2}(x-1-i') = x(x-1)_{n-1}$$

Donc

$$\boxed{(x)_n = x(x-1)_{n-1}.}$$

2. Soient $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
On a, d'après la question 1,
$$(x+y)_n = (x+y)(x+y-1)_{n-1}.$$
En développant, on en déduit que
$$(x+y)_n = x(x+y-1)_{n-1} + y(x+y-1)_{n-1}$$
Autrement dit,
$$\boxed{(x+y)_n = x(x-1+y)_{n-1} + y(x+y-1)_{n-1}}$$

3. (a) Soient $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Pour $n = 0$, par définition,
$$(x+y)_0 = 1$$
et
$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} (x)_k (y)_{-k} = \binom{0}{0} (x)_0 (y)_0 = 1.$$
On a donc
$$\boxed{(x+y)_0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} (x)_k (y)_{-k},}$$
Conclusion : $\underline{P(0) \text{ est vraie.}}$

(b) On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie. Soient $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. $n+1$ étant un entier strictement positif, en appliquant la question 2, on a
$$(x+y)_{n+1} = x(x-1+y)_n + y(x+y-1)_n.$$
Or $P(n)$ est vraie. On en déduit que
$$(x-1+y)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)_k (y)_{n-k}, (x+y-1)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k (y-1)_{n-k},$$
Donc
$$(x+y)_{n+1} = x \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)_k (y)_{n-k} \right) + y \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k (y-1)_{n-k}.$$
D'où
$$(x+y)_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x-1)_k (y)_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k y(y-1)_{n-k}.$$
or $k \in \{0, \cdots, n\}$, donc $k \geq 0, n-k \geq 0$. D'où $x(x-1)_k = (x)_{k+1}$ et $y(y-1)_{n-k} = (y)_{n+1-k}$ (question 1). Donc
$$(x+y)_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_{k+1} (y)_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)k(y)_{n+1-k}.$$
En effectuant le changement de variable $k' = k+1$ dans la première somme, on obtient
$$(x+y)_{n+1} = \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} (x)_{k'} (y)_{n+1-k'} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)k(y)_{n+1-k}.$$
donc, en détachant certains termes des deux sommes et en regroupant,
$$(x+y)_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) (x)_k (y)_{n+1-k} + (x)_{n+1} + (y)_{n+1}.$$
En appliquant la formule du triangle de Pascal, on obtient
$$(x+y)_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n+1-k} + (x)_{n+1} + (y)_{n+1}.$$

En regroupant les termes, on obtient finalement

$$\boxed{(x+y)_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (x)_k (y)_{n+1-k}.}$$

Conclusion : la propriété P est héréditaire.

(c) On a montré que $P(0)$ est vraie et que P est héréditaire. D'après le principe de récurrence, il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, (x+y)_n = \sum_{k=0}^{n} (x)_k (y)_{n-k}}$$

Exercice 2. 1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin(2\theta)^4 \cos(\theta)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On cherche à résoudre l'équation d'inconnue $x \in]0, 2\pi[$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{-1}{2}. \tag{E}$$

(a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos(a)\sin(b).$$

(b) À l'aide de la formule précédente et d'un résultat du cours, calculer de deux manières la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left((k+\frac{1}{2})x \right) - \sin\left((k-\frac{1}{2})x \right) \right).$$

3. En déduire les solutions de (E).

4. On cherche à résoudre l'équation d'inconnue réelle x

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 1. \tag{F}$$

(a) Montrer qu'il existe $\phi \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que

$$(F) \Leftrightarrow r\cos(x+\phi) = 1$$

(b) En déduire les solutions de (F).

Correction

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\sin(2\theta)^4 \cos(\theta) &= \left(\tfrac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i}\right)^4 \cos(\theta) \\
&= \tfrac{1}{2^5}(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})^4 (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
&= \tfrac{1}{2^5}(e^{8i\theta} - 4e^{6i\theta}e^{-2i\theta} + 6e^{4i\theta}e^{-4i\theta} - 4e^{2i\theta}e^{-6i\theta} + e^{-8i\theta})(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
&= \tfrac{1}{2^5}(e^{i8\theta} - 4e^{4i\theta} + 6 - 4e^{-4i\theta} + e^{-8i\theta})(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
&= \tfrac{1}{2^5}(e^{i9\theta} - 4e^{5i\theta} + 6e^{i\theta} - 4e^{-3i\theta} + e^{-7i\theta} + e^{i7\theta} - 4e^{3i\theta} + 6e^{-i\theta} - 4e^{-5i\theta} + e^{-9i\theta}) \\
&= \tfrac{1}{2^5}\left(e^{i9\theta} + e^{-9i\theta} + e^{i7\theta} + e^{-7i\theta} - 4(e^{5i\theta} + 4e^{-5i\theta}) - 4(e^{-3i\theta} + e^{3i\theta}) + 6(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sin(2\theta)^4 \cos(\theta) = \frac{1}{16}\left(\cos(9\theta) + \cos(7\theta) - 4\cos(5\theta) - 4\cos(3\theta) + 6\cos(\theta)\right)}$$

2. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$

En soustrayant, on obtient

$$\boxed{\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos(a)\sin(b).}$$

(b) Par définition, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x) \right)$$

En appliquant la formule de la question 2.a, on en déduit que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kx)\sin(\frac{x}{2}).$$

De plus, on constate que S_n est une somme télescopique. En effet pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin((k+1-\frac{1}{2})x) = \sin((k+\frac{1}{2})x)$. Donc

$$S_n = \sin((n+\frac{1}{2})x) - \sin(\frac{x}{2}).$$

D'où

$$\boxed{S_n = 2\sin(\frac{x}{2})\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \sin((n+\frac{1}{2})x) - \sin(\frac{x}{2}).}$$

3. Comme $x \in]0, 2\pi[$, on a $\sin(\frac{x}{2}) \neq 0$. D'après la question 2.b, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\frac{\sin(x)}{2}} - \frac{1}{2}.$$

L'équation (E) est alors équivalente à

$$\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\frac{\sin(x)}{2}} = 0.$$

Or $2\sin(\frac{x}{2}) \neq 0$ $(x \in]0, 2\pi[)$. Donc l'équation (E) est équivalente à

$$\sin((n+\frac{1}{2})x) = 0.$$

Autrement dit, x est solution de (E) si et seulement si $x \in]0, 2\pi[$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$(n+\frac{1}{2})x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{2n+1}$$

Or :

$$0 < \tfrac{2k\pi}{2n+1} < 2\pi \quad \Leftrightarrow 0 < k < 2n+1.$$

L'ensemble solutions de (E) est donc

$$\boxed{S = \left\{ \frac{2k\pi}{2n+1}, k \in [|1, 2n|] \right\}.}$$

4. (a) On a

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) &= 2(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \tfrac{1}{2}\sin(x)) \\ &= 2(\cos(\tfrac{\pi}{6})\cos(x) - \sin(\tfrac{\pi}{6})\sin(x) \\ &= 2\cos(x + \tfrac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

Donc l'équation (F) est équivalente à

Donc :

$$(F) \Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

En posant $u = x + \frac{\pi}{6}$, on en déduit que x est solution de (F) si et seulement si u est un élément de l'ensemble
$$\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{-\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$
Autrement dit si et seulement si
$$x \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$
Donc
$$\boxed{S = \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Exercice 3. Soit $f : E \mapsto F$ une application. Si B est une partie de F, on rappelle que l'image réciproque de B par f est l'ensemble
$$f^{-}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}.$$

1. Déterminer $f^{-}(\emptyset)$.
2. Soient A et B deux sous-ensembles de F. Montrer que $f^{-}(A \cap B) = f^{-}(A) \cap f^{-}(B)$. Comparer $f^{-}(A \cup B)$ et $f^{-}(A) \cup f^{-}(B)$.
3. On suppose que f est surjective. Montrer que
$$\forall B \subset F, f^{-}(B) = \emptyset \Leftrightarrow B = \emptyset.$$
4. On suppose que f est injective. Soient A et B deux parties de E. Montrer que
$$f(A) \cap f(B) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Correction

1. Tout élément de E ayant une image dans F, on a
$$f^{-}(\emptyset) = \emptyset.$$
2. Soit $x \in f^{-}(A \cap B)$.
Donc $f(x) \in A \cap B$. Or $A \cap B$ est inclus dans A et dans B. Autrement dit, $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$. Donc x est un élément de $f^{-}(A) \cap f^{-}(B)$. Donc $f^{-}(A \cap B) \subset f^{-}(A) \cap f^{-}(B)$.
Soit $x \in f^{-}(A) \cap f^{-}(B)$. Par définition, $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$. Donc $f(x) \in A \cap B$. Autrement dit, $x \in f^{-}(A \cap B)$. Donc $f^{-}(A) \cap f^{-}(B) \subset f^{-}(A \cap B)$.
Conclusion : par le principe de double inclusion, on en déduit que $f^{-}(A \cap B) = f^{-}(A) \cap f^{-}(B)$.
Soit $x \in f^{-}(A \cup B)$. On a $f(x) \in A \cup B$. Donc $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$. Autrement dit $x \in f^{-}(A)$ ou $x \in f^{-}(B)$. Donc $x \in f^{-}(A) \cup f^{-}(B)$. Par conséquent, $f^{-}(A \cup B) \subset f^{-}(A) \cup f^{-}(B)$.
Réciproquement, soit $x \in f^{-}(A) \cup f^{-}(B)$. On a donc $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$. Donc $f(x) \in A \cup B$. Autrement dit $x \in f^{-}(A \cup B)$. Donc $f^{-}(A) \cup f^{-}(B) \subset f^{-}(A \cup B)$.
Conclusion : par le principe de double inclusion, on en déduit que $f^{-}(A \cup B) = f^{-}(A) \cup f^{-}(B)$.
3. on a vu à la question 1 que si B est vide alors $f^{-}(B) = \emptyset$. Reste donc à montrer l'implication $f^{-}(B) = \emptyset \Rightarrow B = \emptyset$. Montrons la contraposée. On suppose que $B \neq \emptyset$. il existe donc un élément y de B. f étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc x est un élément de $f^{-}(B)$. Autrement dit, $f^{-}(B)$ n'est pas vide.
Par double implication, on en déduit que la proposition $\forall B \subset F, f^{-}(B) = \emptyset \Leftrightarrow B = \emptyset$ est vraie.
4. Montrons par la contraposée que $f(A) \cap f(B) = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset$. Supposons que $A \cap B \neq \emptyset$. Considérons x un élément de cette intersection. On a alors $f(x) \in f(A)$ et $f(x) \in f(B)$. Donc $f(x)$ est un élément de $f(A) \cap f(B)$. Donc $f(A) \cap f(B)$ n'est pas vide.
Réciproquement, on veut montrer que $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$. On prouve de nouveau la contraposée. Supposons que $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$. Considérons un élément y de cet intersection. Il existe donc $a \in A$ et $b \in B$ tel que $f(a) = y$ et $f(b) = y$. Or f est injective, donc $a = b$. Donc $A \cap B$ est non vide et contient au moins a comme élément.
Par double implication, on en déduit que la proposition $f(A) \cap f(B) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ est vraie.

Exercice 4. 1. Montrer, pour tout $(n, k, i) \in \mathbb{N}^3$, $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}$. On veillera à traiter tous les cas.

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}.$$

Correction

1. — Pour $i > n$, on a d'après les conventions sur les coefficients binomiaux, $\binom{n}{i} = 0$ et $\binom{n-k}{n-i} = 0$. Donc les deux membres de l'égalité sont nuls.
   — Pour $k > i$, on a $\binom{i}{k} = 0$ et $\binom{n-k}{n-i} = 0$. Les deux membres de l'égalité sont par conséquent nuls.
   — Pour $i \leq n$ et $k \leq i$, on a donc $k \leq i \leq n$. D'où :

$$\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{i!}{k!(i-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}.$$

2. On a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}.$$

   En appliquant le résultat de la question 1, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}.$$

   Donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{n-i}.$$

   En posant $k' = n - i$, on a $0 \leq k' \leq n - k$. D'où :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{k'=0}^{n-k} \binom{n-k}{k'}.$$

   Donc d'après le binôme de Newton, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

   En appliquant de nouveau la formule du binôme, on obtient :

$$\boxed{S_n = 3^n.}$$

Exercice 5. On considère l'application ϕ suivante :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \frac{1}{z}. \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est bijective, et déterminer sa réciproque.
2. On identifie le plan aux nombres complexes. Dans ce cas, le cercle de centre a et de rayon R est :

$$\mathcal{C}(a, R) = \{z \in \mathbb{C} || z - a| = R\}.$$

   Déterminer $\phi\left(\mathcal{C}(0, 1)\right)$.
3. On fixe $z_0 = a_0 + ib_0$, avec $a_0 \neq 0$ ou $b_0 \neq 0$. Considérons l'ensemble :

$$D_{z_0} = \left\{ z = a + ib \in \mathbb{C}, a_0 a + b_0 b - \frac{1}{2} = 0 \right\}.$$

   Montrer que l'image de D_{z_0} par ϕ est égale à $\mathcal{C}(\overline{z_0}, |z_0|)\backslash\{0\}$.
4. En déduire l'image de $\mathcal{C}(z_0, |z_0|)\backslash\{0\}$ par ϕ.

Correction

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :
$$\phi(\phi(z)) = \phi(\frac{1}{z}) = \frac{1}{\frac{1}{z}} = z.$$
Donc :
$$\phi \circ \phi = I_{\mathbb{C}^*}.$$
Donc : ϕ vérifie les propriétés de l'application réciproque de ϕ. Autrement dit, ϕ est bijective et sa réciproque est elle-même.
2. Soit $z \in \mathcal{C}(0,1)$. Donc : $|z| = 1$. Donc $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} = 1$. Autrement dit, $|\phi(z)| = 1$. Donc :
$$\phi\left(\mathcal{C}(0,1)\right) \subset \mathcal{C}(0,1).$$
Réciproquement, soit $z \in \mathcal{C}(0,1)$. Son antécédent par ϕ est $y = \frac{1}{z}$. Comme $|z| = 1$, on a $|y| = 1$. D'où : $\mathcal{C}(0,1) \subset \phi\left(\mathcal{C}(0,1)\right)$. Par le principe de double inclusion, il en résulte que :
$$\phi\left(\mathcal{C}(0,1)\right) = \mathcal{C}(0,1).$$
3. On garde les notations de l'énoncé. Raisonnons par équivalence.
$$\begin{aligned}
\phi(z) \in \mathcal{C}(\overline{z_0}, |z_0|)\backslash\{0\} &\Leftrightarrow \left|\tfrac{1}{z} - \overline{z_0}\right|^2 = |z_0|^2 \\
&\Leftrightarrow |1 - z\overline{z_0}|^2 = |z|^2|z_0|^2,\ z \neq 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - z\overline{z_0})(1 - \overline{z}z_0) = |z|^2|z_0|^2,\ z \neq 0 \\
&\Leftrightarrow 1 - z\overline{z_0} - \overline{z}z_0 + |z|^2|z_0|^2 = |z|^2|z_0|^2,\ z \neq 0 \\
&\Leftrightarrow 1 - z\overline{z_0} - \overline{z}z_0 = 0,\ z \neq 0 \\
&\Leftrightarrow 1 - 2\Re\left(z\overline{z_0}\right) = 0,\ z \neq 0 \\
&\Leftrightarrow 2\Re\left(z\overline{z_0}\right) = 1,\ z \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \Re\left(z\overline{z_0}\right) = \tfrac{1}{2},\ z \neq 0 \\
&\Leftrightarrow aa_0 + bb_0 = \tfrac{1}{2},\ z \neq 0 \\
&\Leftrightarrow aa_0 + bb_0 = \tfrac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow z \in D_{z_0}
\end{aligned}$$
Il en résulte que :
$$\phi(D_{z_0}) = \mathcal{C}(\overline{z_0}, |z_0|)\backslash\{0\}.$$
4. D'après la question précédente, on en déduit que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, l'image par ϕ^{-1} de $\mathcal{C}(\overline{z_0}, |z_0|)\backslash\{0\}$ est D_{z_0}. Or, $\phi^{-1} = \phi$. Donc :
$$\phi\left(\mathcal{C}(\overline{z_0}, |z_0|)\backslash\{0\}\right) = D_{z_0}.$$
Donc :
$$\phi\left(\mathcal{C}(\overline{\overline{z_0}}, |\overline{z_0}|)\backslash\{0\}\right) = D_{\overline{z_0}}.$$
D'où :
$$\phi\left(\mathcal{C}(z_0, |z_0|)\right)\backslash\{0\} = D_{\overline{z_0}}.$$

Correction

1. On a
$$\cos(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{2\pi}{12}).$$
Donc
$$\boxed{\cos(\frac{\pi}{6}) = 2\cos(\frac{\pi}{12})^2 - 1.}$$
2. D'après la question 1, on en déduit que
$$2\cos(\frac{\pi}{12})^2 - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$
Donc $\cos(\frac{\pi}{12})$ est solution de
$$\boxed{2X^2 - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.}$$

3. Il en résulte que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Or $\cos(\frac{\pi}{12} > 0$ car $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$. Donc

$$\boxed{\cos(\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

Exercice 6. 1. Justifier que $\cos(\frac{\pi}{6}) = 2\cos(\frac{\pi}{12})^2 - 1$.

2. En déduire que $\cos(\frac{\pi}{12})$ est solution de l'équation

$$2X^2 - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

3. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes

$$S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} (i-j).$$

et

$$T_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} (i-j).$$

Correction

On a :

$$S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} i - \sum_{1\leq i,j\leq n} j$$

En renommant les variables dans la deuxième somme, on constate que l'on a

$$S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} i - \sum_{1\leq i,j\leq n} i = 0.$$

Donc :

$$\boxed{S_n = 0.}$$

On a :

$$\begin{aligned}
T_n &= \textstyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(i-j) \\
&= \textstyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i - \sum_{1\leq i\leq j\leq n} j \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} - \sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&= \textstyle\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2\right) \\
&= \textstyle\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \textstyle\frac{n(n+1)}{4}(1 - \frac{2n+1}{3}) \\
&= \textstyle\frac{n(n+1)}{4}\frac{2-2n}{3} \\
&= \textstyle\frac{-n(n+1)(n-1)}{6}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{T_n = -\frac{-n(n+1)(n-1)}{6}.}$$