Corrigé du DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

Problème 1 (Modélisation mathématique et informatique)
Un modèle de dynamique des populations : les populations structurées

La dynamique des populations consiste à étudier l'évolution du nombre d'individus d'une population au cours du temps. Un des premiers modèles est de supposer que le temps est un entier positif n (correspondant par exemple à un nombre d'années) et que le taux de croissance d'une population est un réel $a > 0$ fixé. Autrement dit, si x_n est le nombre d'individus au temps n, on a $\frac{x_{n+1}}{x_n} = a$. On constate alors que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.

Par exemple, on cherche à déterminer le nombre de cellules x_n après n heures sachant qu'une cellule se divise en deux toutes les heures. En supposant qu'il y ait au temps 0 une seule cellule et que l'on soit dans des conditions optimales, on constate alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = 2x_n$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2^n$ et ici le taux de croissance est 2.

Mais ce modèle comporte de nombreux inconvénients, l'un d'entre eux étant qu'il suppose que tous les individus de la population étudiée se reproduisent de la même manière.

Une façon de raffiner ce modèle est alors de partager la population en plusieurs classes suivant certains facteurs (par exemple l'âge). En faisant des hypothèses sur la croissance de la population (ici linéaire), il est alors possible d'obtenir des prévisions plus précises dans le développement de la population étudiée.

A - Exemple : un modèle de développement cellulaire

Dans cette partie, on suppose qu'il existe deux types de cellules : les matures et les immatures. Si au temps n une cellule est immature, elle devient mature au temps $n + 1$. Si au temps n une cellule est mature, alors au temps $n + 1$ elle se divise en deux cellules, l'une mature et l'autre immature. En posant respectivement x_n et y_n le nombre de cellules matures et immatures au temps n, on constate alors que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \text{ et avec } x_0 \in \mathbb{N}, y_0 \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

1. (INFO) Écrire une fonction en Python `suite(n,x0,y0)` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne la valeur du couple (x_n, y_n).
2. Montrer que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.
3. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n et y_n en fonction de n, x_0 et y_0.
4. En supposant qu'au temps 0, il y a uniquement une cellule immature, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n)$ où $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
5. Montrer que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^k$.

Correction

1. (INFO) On pose :

```
def suite(n,x0,y0) :
    x=x0
    y=y0
```

```
    for i in range(0,n) :
        d=x
        x=x+y
        y=x
    return (x,y)
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$x_{n+2} = x_{n+1} + y_{n+1}.$$

Or, $y_{n+1} = y_n$. On en déduit que

$$\boxed{x_{n+2} = x_{n+1} + x_n}.$$

3. On constate que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une récurrence linéaire d'ordre dont voici l'équation caractéristique :

$$X^2 - X - 1 = 0.$$

Calculons son discriminant : $\Delta = 5$. On en déduit que les solutions de cette équation sont :

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Par conséquent, il existe A et B réels tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

Déterminons les valeurs de A et de B en fonction de x_0 et de y_0. D'après la relation de récurrence entre x_n et y_n, on en déduit que $x_1 = x_0 + y_0$. Donc

$$\begin{cases} x_0 & = A + B \\ x_0 + y_0 & = Ar_1 + Br_2 \end{cases}$$

En regroupant la ligne 2 suivant $A+B$ et $A-B$, on obtient :

$$\begin{cases} x_0 & = A + B \\ x_0 + y_0 & = \frac{A+B}{2} + \frac{\sqrt{5}(A-B)}{2} \end{cases}$$

En remplaçant $A+B$ par x_0, on a

$$\begin{cases} x_0 & = A + B \\ x_0 + y_0 & = \frac{x_0}{2} + \frac{\sqrt{5}(A-B)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 & = A + B \\ \frac{x_0}{2} + y_0 & = \frac{\sqrt{5}(A-B)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 & = A + B \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_0 + 2y_0\right) & = A - B \end{cases}$$

En sommant les deux lignes, et en soustrayant la ligne 2 à la ligne 1, on obtient

$$2A = \frac{(1+\sqrt{5})x_0 + 2y_0}{\sqrt{5}}, 2B = \frac{x_0(\sqrt{5}-1) - 2y_0}{\sqrt{5}}$$

D'où

$$\boxed{A = \frac{(1+\sqrt{5})x_0 + 2y_0}{2\sqrt{5}}, B = \frac{x_0(\sqrt{5}-1) - 2y_0}{2\sqrt{5}}}.$$

Il en résulte que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{(1+\sqrt{5})x_0 + 2y_0}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{x_0(\sqrt{5}-1) - 2y_0}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}.$$

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$y_{n+1} = x_n.$$

Donc

$$\forall n \geq 1, y_n = \frac{(1+\sqrt{5})x_0 + 2y_0}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{x_0(\sqrt{5}-1) - 2y_0}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Vérifions que la formule de droite est égale à y_0 lorsque $n = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\tfrac{(1+\sqrt{5})x_0+2y_0}{2\sqrt{5}} \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + \tfrac{x_0(\sqrt{5}-1)-2y_0}{2\sqrt{5}} \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} &= \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \left(2x_0 + \tfrac{4y_0}{1+\sqrt{5}} - 2x_0 - \tfrac{4y_0}{1-\sqrt{5}}\right). \\
&= \tfrac{4y_0}{2\sqrt{5}} \left(\tfrac{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}\right) \\
&= \tfrac{4y_0}{2\sqrt{5}} \cdot \tfrac{-2}{-4} \\
&= y_0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a en fait

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \frac{(1+\sqrt{5})x_0 + 2y_0}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{x_0(\sqrt{5}-1) - 2y_0}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.}$$

4. On suppose qu'il y a temps 0 une cellule immature et aucune cellule mature. Autrement dit, $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$. En remplaçant dans la formule de la question 3, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
x_n &= \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \\
&= \tfrac{1}{2^n\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^n \tbinom{n}{k} \sqrt{5}^k - \sum_{k=0}^n \tbinom{n}{k} (-\sqrt{5})^k\right) \text{ (en appliquant la formule du binôme)}
\end{aligned}$$

En séparant les sommes suivant les indices pairs et impairs, on obtient

$$x_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq n, \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \sqrt{5}^k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n, \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \sqrt{5}^k - \sum_{\substack{0 \leq k \leq n, \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \sqrt{5}^k - \sum_{\substack{0 \leq k \leq n, \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} (-\sqrt{5})^k\right).$$

Or$(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ si k est impair. Donc

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{5}} \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq n, \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \sqrt{5}^k\right).$$

On pose $k = 2k'+1$ avec $k' \in \mathbb{N}$. On a donc $\frac{-1}{2} \leq k' \leq \frac{n-1}{2}$. k' étant naturel, on a donc $\frac{-1}{2} \leq k' \leq \frac{n-1}{2}$. D'où

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{5}} \left(\sum_{k'=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k'+1} \sqrt{5}^{2k'+1}\right).$$

Par conséquent,

$$\boxed{x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{k'=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k'+1} 5^{k'}\right).}$$

B - Un modèle général et quelques applications

Dans cette partie, on présente le modèle d'une population structurée en deux classes de manière générique. On appliquera alors ce modèle à différents problèmes issues de la biologie.

Considèrons deux populations $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ évoluant de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases} \tag{E}$$

où a, b, c, d sont des paramètres réels.

Par exemple, pour la population de cellules étudiées dans la partie A on a deux classes, l'une correspondant aux cellules matures et l'autre aux cellules immatures. Les paramètres ont dans ce contexte la signification biologique suivante :

- $a = 1$ est la proportion de cellules matures restant matures entre deux temps consécutifs ;
- $b = 1$ est la proportion de cellules immatures devenant matures entre deux temps consécutifs ;
- $c = 1$ est le nombre de cellules immatures obtenues par division d'une cellule mature ;
- $d = 0$ car les cellules immatures ne se divisent pas.

B1 - Étude du modèle général

6. (INFO) Écrire une fonction en Python `suite(n,a,b,c,d,x0,y0)` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$, quatre paramètres réels a, b, c, d et les conditions initiales x_0, y_0 et qui retourne la valeur du couple (x_n, y_n).
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = (a+d)x_{n+1} + (bc - ad)x_n$.
   Indication : on pourra d'abord montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $bdy_n = dx_{n+1} - adx_n$.
8. De manière similaire, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, y_{n+2} = (a+d)y_{n+1} + (bc - ad)y_n$.
9. Réciproquement, on suppose que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = (a+d)x_{n+1} + (bc - ad)x_n, \ \ y_{n+2} = (a+d)y_{n+1} + (bc - ad)y_n,$$

   et avec comme conditions initiales $x_0, y_0, x_1 = ax_0 + by_0, y_1 = cx_0 + dy_0$.
   Montrer par récurrence que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient le système (E). (Indication : on pourra vérifier $P(0)$ et $P(1)$, et supposer que $P(n-1)$ et $P(n)$ sont vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}^\star$).
10. On suppose que $(a+d)^2 - 4(ad - bc) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_n en fonction de n et des autres paramètres.

Correction

6. On définit `suite` de la manière suivante :

```
def suite(n,a,b,c,d,x0,y0) :
    x=x0
    y=y0
    for i in range(0,n) :
        aux=x
        x=a*x+b*y
        y=c*aux+d*y
    return x,y
```

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

   $$x_{n+2} = ax_{n+1} + by_{n+1}.$$

   Or, d'après la deuxième relation,

   $$by_{n+1} = bcx_n + bdy_n.$$

D'où

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bcx_n + bdy_n.$$

Or

$$x_{n+1} = ax_n + by_n.$$

Donc

$$bdy_n = dx_{n+1} - adx_n.$$

D'où

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bcx_n + dx_{n+1} - adx_n.$$

Autrement dit

$$\boxed{x_{n+2} = (a+d)x_{n+1} + (bc-ad)x_n.}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= cx_{n+1} + dy_{n+1} \\ &= cax_n + cby_n + dy_{n+1} \end{aligned}$$

Or $y_{n+1} = cx_n + dy_n$. Donc $acx_n = ay_{n+1} - ady_n$. D'où

$$y_{n+2} = ay_{n+1} - ady_n + bcy_n + dy_{n+1}$$

Par conséquent,

$$\boxed{y_{n+2} = (a+d)y_n + (bc-ad)y_n.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$P(n) : x_{n+1} = ax_n + by_n, y_{n+1} = cx_n + dy_n.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

— Initialisation : $P(0)$ est vraie par hypothèse sur x_1 et y_1.

— Hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. Par définition de x_{n+2},

$$\begin{aligned} x_{n+2} - ax_{n+1} - by_{n+1} &= (a+d)x_{n+1} + (bc-ad)x_n - ax_{n+1} - by_{n+1} \\ &= dx_{n+1} + (bc-ad)x_n - by_{n+1} \\ &= d(ax_n + by_n) + (bc-ad)x_n - b(cx_n + dy_n) \ \ \text{(P(n) vraie)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même, par définition de y_{n+2},

$$\begin{aligned} y_{n+2} - cx_{n+1} - dy_{n+1} &= (a+d)y_{n+1} + (bc-ad)y_n - cx_{n+1} - dy_{n+1} \\ &= ay_{n+1} + (bc-ad)y_n - cx_{n+1} \\ &= a(cx_n + dy_n) + (bc-ad)y_n - c(ax_n + by_n) \ \ \text{(P(n) vraie)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{x_{n+1} = ax_n + by_n,\ y_{n+1} = cx_n + dy_n.}$$

Remarque : En écrivant la preuve de cette manière, on constate qu'il n'y a pas besoin de faire une récurrence sur deux termes.

10. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite récurrence linéaire d'ordre 2. On a alors comme équation caractéristique :

$$X^2 - (a+d)X + (ad-bc) = 0. \tag{2}$$

Déterminons son discriminant : $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$. Or on suppose que $\Delta = 0$. La solution de l'équation (2) est donc : $r = \frac{a+d}{2}$. Il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (A+Bn)r^n.$$

Déterminons A et B en fonction des conditions initiales.

$$\begin{cases} x_0 = A \\ x_1 = (A+B)(\frac{a+d}{2}) \end{cases}$$

— Cas 1 : $a+d=0$. On a alors $\forall n \geq 1, x_n = 0$.
— Cas 2 : $(a+d) \neq 0$. On a alors $B = \frac{2x_1}{a+d} - x_0$, avec $x_1 = ax_0 + by_0$. D'où, $B = \frac{2ax_0+2by_0-ax_0-dy_0}{a+d} = \frac{(a-d)x_0+2by_0}{a+d}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (x_0 + \frac{(a-d)x_0+2by_0}{a+d}n)\left(\frac{a+d}{2}\right)^n.}$$

B2 - Application : une espèce vouée à disparaître

On considère une espèce partagée en deux classes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (les reproducteurs) et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (les parasites). On suppose que l'évolution de l'espèce obéit aux règles suivantes :
— un reproducteur donne naissance à un reproducteur et à deux parasites entre le temps n et $n+1$;
— un reproducteur reste reproducteur entre le temps n et $n+1$;
— un parasite mange deux reproducteurs entre le temps n et $n+1$.
En modélisant à l'aide d'une récurrence, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 2y_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 2y_n \end{cases} \tag{3}$$

On suppose qu'au temps 0, il n'y a pas de parasites et 2 reproducteurs.

11. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n et y_n en fonction de n.
12. Montrer qu'il existe des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que x_n est négatif.

On constate alors qu'à partir d'un certain temps, ce modèle n'est plus valide concernant la population étudiée : en effet, si on obtient $x \leqslant 0$ ceci signifierait qu'il y aurait un nombre négatif d'individus ce qui n'a pas de sens biologique. Dans le cas où on aurait $x_{n_0} \leqslant 0$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, on en conclut que la population $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'éteint à partir d'un certain moment.

Correction

11. Pour cet exemple, en gardant les notations du système (E), on a

$$a = 0, b = 2, c = -2, d = 2.$$

D'après les questions 7 et 8, on sait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence à savoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (a+d)u_{n+1} + (bc-ad)u_n.$$

En remplaçant par les valeurs, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = 2x_{n+1} - 4x_n, y_{n+2} = 2y_{n+1} - 4y_n.$$

Les deux suites ont alors comme équation caractéristique

$$X^2 - 2X + 4 = 0.$$

On obtient $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$. Et les solutions complexes sont

$$r_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, r_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{\frac{-i\pi}{3}}.$$

On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (A\cos(\frac{n\pi}{3}) + B\sin(\frac{n\pi}{3}))2^n, y_n = (C\cos(\frac{n\pi}{3}) + D\sin(\frac{n\pi}{3}))2^n$$

Déterminons les valeurs de A, B, C, D. Par hypothèse, au temps 0, il y a deux reproducteurs et 0 parasite. Donc $x_0 = 0, y_0 = 2$. En appliquant les formules pour x_1 et y_1, on a donc

$$x_1 = 2, y_1 = 4.$$

On obtient les systèmes suivant pour A, B et C, D :

$$\begin{cases} 0 = A \\ 2 = (\frac{A}{2} + B\frac{\sqrt{3}}{2})2 \end{cases} \begin{cases} 2 = C \\ 4 = (\frac{C}{2} + D\frac{\sqrt{3}}{2})2 \end{cases}$$

D'où

$$A = 0,\ B = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},\ C = 2,\ D = (\frac{4}{2} - \frac{2}{2})\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{2^{n+1}\sqrt{3}}{3}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right),\ y_n = 2^{n+1}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right).}$$

12. Pour $n = 3$, $\sin(\frac{3\pi}{3}) = 0$, donc $x_3 = 0$. Pour $n = 4$, on a alors $x_n = 2^5\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(4\frac{\pi}{3}) = 2^5\frac{\sqrt{3}}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -2^4 < 0$. Donc $x_4 < 0$. Il existe bien des n pour lesquels x_n est négatif.
Remarque : De manière générale, le signe de x_n pour $n \geq 1$ dépend uniquement du signe de $\sin(\frac{n\pi}{3})$. Déterminons son signe :

$$\sin(n\tfrac{\pi}{3}) \leq 0 \Leftrightarrow \tfrac{n\pi}{3} \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}[\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi]$$

Autrement dit, le sinus est s négatif si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{aligned} \pi + 2k\pi \leq \tfrac{n\pi}{3} \leq 2(k+1)\pi &\Leftrightarrow 2k+1 \leq \tfrac{n}{3} \leq 2(k+1) \\ &\Leftrightarrow 6k+3 \leq n \leq 6k+6 \end{aligned}$$

Autrement dit, on a $n = 6k + i$ avec $i \in \{3, 4, 5, 6\}$. n étant strictement positif, on en déduit que le sinus est négatif si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k + i$ avec $i \in \{3, 4, 5, 6\}$. De plus, comme $x_{n+1} = 2y_n$, on en déduit qu'il existe aussi des valeurs de y_n qui vont être négatives.

B3 - Un modèle tue-mouche

On place dans un même espace confiné deux espèces de mouches, Drosophila simulans et Drosophila melanogaster. On suppose que leur taux de croissance est identique et est de $a > 0$, qu'une D. melanogaster élimine systématiquement $b > 0$ D. simulans entre les instants n et $n+1$. On note respectivement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de populations de D. simulans et de D. melanogaster. On suppose que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

13. Déterminer les relations de récurrences que vérifient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
14. Exprimer x_n et y_n en fonction de x_0, y_0, a, b, n.
15. En déduire que la population de simulans disparaît à partir d'un temps n_0, que l'on exprimera en fonction de a, b, x_0, y_0.
16. (INFO) On suppose que la fonction `tueMouche(x0,y0,a,b,n)` retourne la valeur du couple (x_n, y_n). On considère les deux programmes suivants :

```
n=0
simulans=tueMouche(x0,y0,a,b,n)[0]
while(simulans>0) :
  n=n+1
  simulans=tueMouche(x0,y0,a,b,n)[0]
print(n)
```

```
n=0
melanogaster=tueMouche(x0,y0,a,b,n)[1]
while(simulans>0) :
  n=n+1
  melanogaster=tueMouche(x0,y0,a,b,n)[1]
print(n)
```

Le ou lesquels de ces programmes terminent ? On se placera dans les conditions de l'énoncé. Dans le cas où il y a une fin au programme, dire ce qui sera affiché.

Correction

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $y_{n+1} = ay_n$ car le taux de croissance des D.melanogaster est de a et $x_{n+1} = ax_n - by_n$ car le taux de croissance des D. simulans est de a, mais by_n d'entre eux disparaissent car elles se font éliminées par les D.melanogaster.
14. On a donc le système de récurrence suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= ax_n - by_n \\ y_{n+1} &= ay_n \end{cases}$$

On constate que l'on a un système du même type que (E). On en déduit que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les récurrences d'ordre 2 suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = 2ax_{n+1} - a^2x_n,\ y_{n+2} = 2ay_{n+1} - a^2y_n.$$

On a alors comme équation caractéristique

$$X^2 - 2aX + a^2 = 0$$

on constate que a est racine double de $X^2 - 2aX + a^2$. On en déduit que l'on

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = (A + Bn)a^n,\ y_n = (C + Dn)a^n.$$

Déterminons A, B, C, D.

$$\begin{cases} x_0 = A \\ x_1 = (A+B)a \end{cases} \begin{cases} y_0 = C \\ y_1 = (C+D)a \end{cases}$$

On obtient alors ($a \neq 0$) :

$$x_0 = A,\ B = \frac{x_1}{a} - x_0 = \frac{x_1 - ax_0}{a} = \frac{-by_0}{a},\ C = y_0,\ D = 0.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (x_0 - \frac{by_0}{a}n)a^n, y_n = y_0a^n.$$

15. a étant strictement positif, on en déduit que le signe de x_n dépend uniquement de $(x_0 - \frac{by_0}{a}n)$. On a

$$\begin{aligned} x_0 - \tfrac{by_0}{a}n \leq 0 &\Leftrightarrow x_0 \leq \tfrac{by_0}{a}n \\ &\Leftrightarrow \tfrac{ax_0}{by_0} \leq n \quad (b > 0, y_0 > 0, a > 0) \end{aligned}$$

On en déduit qu'à partir du premier entier n_0 tel que $n_0 \geq \frac{ax_0}{by_0}$, la population de simulans aura disparu.
16. Le premier programme termine et affiche le premier temps n_0 pour lequel il n'y a plus de simulans.
Le deuxième programme ne termine jamais : en effet, on ne modifie jamais la variable `simulans` qui était strictement positif, donc on ne sort pas de la boucle.
Si on remplace la variable `simulans` par la variable `melanogaster`, on constate que le programme ne termine jamais car la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours strictement positive.
Remarque : Le programme ne s'exécute pas correctement si la variable `simulans` n'est pas défini préalablement.

C - Une population structurée en trois classes

On étudie l'évolution d'une population d'insectes que l'on partage en trois classes d'âges : les larves, les insectes adultes et les insectes âgés. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note respectivement x_n, y_n et z_n le nombre de larves, adultes et d'insectes âgés au temps n.

On suppose que l'évolution de ces populations obéit à la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} &= 80y_n \\ y_{n+1} &= \frac{x_n}{20} \\ z_{n+1} &= \frac{y_n}{2} \end{cases}$$

17. Donner une interprétation biologique des coefficients 80, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{20}$, et de la non-apparition de z_n dans cette récurrence.
18. (INFO) Écrire une fonction `popuplation(n)` qui prend en argument une entier $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne le nombre total d'insectes.
19. On cherche à établir une relation de récurrence pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$x_{n+2} = 4x_n. \tag{4}$$
20. On suppose que pour $n = 0$, il y a 100 larves et pas d'insectes adultes et âgés. Déterminer la population totale en fonction de n.
21. Ce modèle vous paraît-il adapté pour l'étude d'une population d'insectes ?

Correction

17. 80 signifie qu'un insecte adulte donne naissance à 80 larves. $\frac{1}{20}$ signifie que seul 5% des larves arrivent à l'âge adulte. $\frac{1}{2}$ signifie que la moitié des insectes à l'âge adulte arrive à la classe âgée. La variable z_n n'apparaît pas dans les récurrences car la population âgée disparaît entre le temps n et le temps $n+1$.
18. Voici une manière d'écrire cette fonction :

```
def population(n) :
    x=float(input())
    y=float(input())
    z=float(input())
    for i in range(0,n) :
        A=x
        B=y
        C=z
        x=80*y
        y=(1/20)*A
        z=(1/2)*B
    return x,y,z
```

Remarque : Il est possible de rajouter d'autres paramètres à la fonction `population`.

19. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $x_{n+2} = 80y_{n+1}$. Or $y_{n+1} = \frac{1}{20}x_n$. On en déduit
$$\forall n \in \mathbb{N} x_{n+2} = 4x_n.$$
20. En résolvant l'équation caractéristique, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = A2^n + B(-2)^n = (A + B(-1)^n)2^n.$$
On a $x_0 = 100, y_0 = 0, z_0 = 0$. Donc $x_1 = 0$. D'où
$$\forall n \in \mathbb{N}, A = 50, B = 50.$$
Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 50 \cdot 2^n(1 + (-1)^n).$$
On sait que $y_{n+1} = \frac{1}{20}x_n$. D'où
$$\forall n \geq 1, y_n = 25 \cdot 2^n(1 + (-1)^{n-1}).$$
On constate que la formule coïncide aussi en 0. On a donc
$$\forall n \geq 0, y_n = 25 \cdot 2^n(1 + (-1)^{n-1}).$$

De même, on sait que $z_{n+1} = \frac{y_n}{2}$. D'où

$$\forall n \geq 1, z_n = 25 \cdot 2^{n-1}(1+(-1)^{n-2})$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la population totale P_n est donnée par $P_n = x_n + y_n + z_n$. Pour $n = 0$, on a donc $P_0 = 100$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} P_n = x_n + y_n + z_n &= 50 \cdot 2^n(1+(-1)^n) + 25 \cdot 2^n(1+(-1)^{n-1}) + 25 \cdot 2^{n-1}(1+(-1)^{n-2}) \\ &= 25 \cdot 2^{n-1}\left(4(1+(-1)^n) + 2(1+(-1)^{n-1}) + (1+(-1)^{n-2})\right) \\ &= 25 \cdot 2^{n-1}\left(7+3(-1)^n\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, P_n = 25 \cdot 2^{n-1}\left(7+3(-1)^n\right).}$$

21. Ce modèle semble approprié lorsque la population ne cesse de croître. Mais il ne prend pas en compte d'autres aspects d'un développement d'une population : limitation des ressources, interaction avec d'autres espèces (comme les prédateurs de ces insectes, ou des espèces partageant les mêmes ressources etc.)

Remarque : Le modèle présenté, communément appelé modèle de Leslie, se généralise à une structuration en n classes. On obtient alors dans ce cas un système de n récurrences linéaires pouvant être étudié à l'aide du calcul matriciel. Il peut être utilisé dans divers contextes comme en biologie de la conservation ou en démographie humaine.

Problème 2 (Méthodes de calcul et raisonnement)

La ferme expérimentale de Grignon souhaite mettre en place une nouvelle salle de traite automatique donnant plus de liberté aux vaches et sans avoir besoin de chien «super-intelligent» pour diriger le troupeau. Cette nouvelle salle contient n stalles alignées numérotées de 1 à n (où $n \in \mathbb{N}^\star$ est un entier fixé). Dès que les stalles sont libres un sas s'ouvre sur un enclos d'attente pour laisser passer n vaches l'une après l'autre. Chaque vache a une stalle de traite préférée. Pour chaque $k \in [\![1,n]\!] = \{1,2,3,\ldots,n\}$, on note $s_k \in [\![1,n]\!]$ le numéro de stalle préférée de la k-ième vache arrivant dans la salle de traite. Si la stalle numéro s_k est déjà occupée, la k-ième vache se déplacera jusqu'à la prochaine stalle libre. Les problèmes surviennent lorsqu'aucune stalle restante n'est disponible puisque les vaches ne peuvent pas faire demi-tour.

L'application $k \mapsto s_k$ est simplement représentée par le n-uplet $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in [\![1,n]\!]^n$ et on dit que s est une fonction de parcage si les n vaches se répartissent dans la salle de traite sans problèmes, c'est-à-dire si chacune occupe une stalle avant le début de la traite. Par exemple pour $n = 6$: $(3,5,1,2,3,2)$ est une fonction de parcage au contraire de $(2,5,6,5,1,2)$ (voir les figures 1 et 2). De plus, on dit que s est croissante si l'application $k \mapsto s_k$ est croissante, c'est-à-dire si $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_n$.

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des fonctions de parcage et $\mathcal{P}_n^+$ le sous-ensemble des fonctions de parcage croissantes. Le but de ce problème est de dénombrer ces deux ensembles.

1. (a) *Rappeler le nombre total d'applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.*

   ▶ Le nombre total d'applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est

   $$\operatorname{card}\left([\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]}\right) = \operatorname{card}([\![1,n]\!])^{\operatorname{card}([\![1,n]\!])} = \boxed{n^n}.$$

   (b) *Montrer que $\mathcal{P}_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$.*

   ▶ D'après le résultat précédent, il y a $2^2 = 4$ applications de $[\![1,2]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$. Il s'agit de :

   $$(1,1), \quad (1,2), \quad (2,1) \quad \text{et} \quad (2,2).$$

   Les trois premières permettent de répartir les vaches dans la salle de traite sans problèmes mais pas la quatrième comme le montre le schéma ci-dessous.
   On en déduit bien que l'ensemble des fonctions de parcage pour $n = 2$ est :

   $$\boxed{\mathcal{P}_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}}.$$

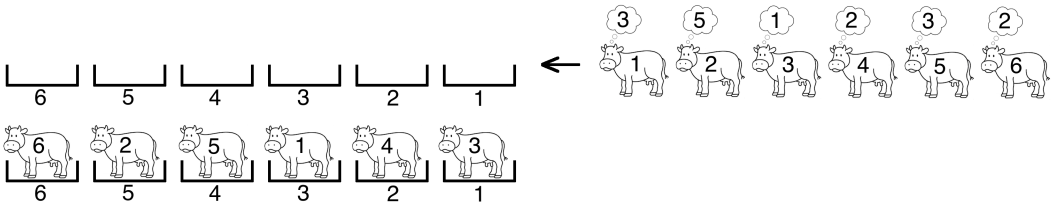


FIGURE 1 – $(3, 5, 1, 2, 3, 2)$ est une fonction de parcage.

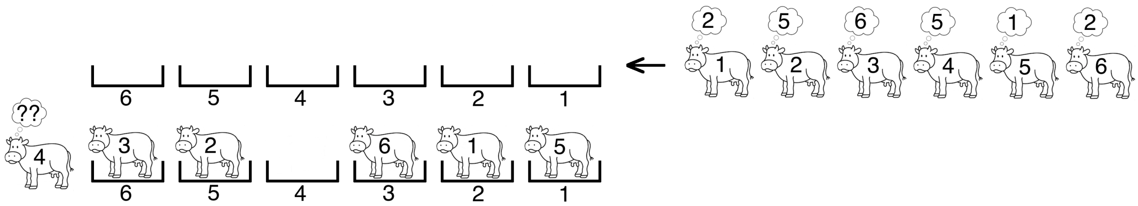
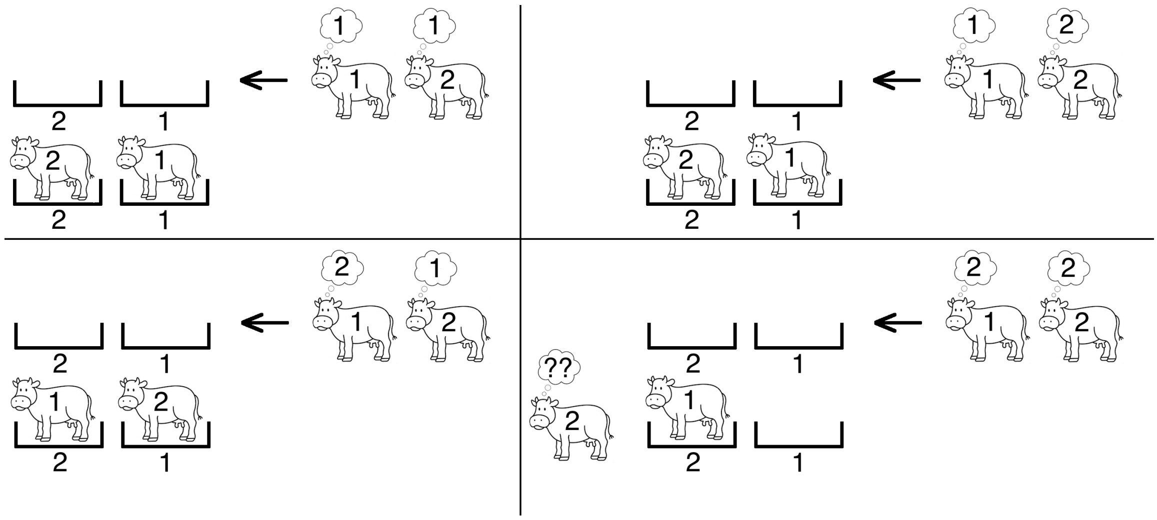


FIGURE 2 – $(2, 5, 6, 5, 1, 2)$ n'est pas une fonction de parcage.



Attention : il ne suffit pas de montrer que $(1, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont des fonctions de parcage (ceci prouve seulement l'inclusion $\supset$), il faut aussi montrer que $(2, 2)$ n'est pas une fonction de parcage (ce qui prouve l'inclusion $\subset$ puisqu'on reconnaît l'ensemble des fonctions de $[\![1, 2]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$ privé de $(2, 2)$). Un dessin est le moyen le plus simple de justifier la réponse ici.

(c) *Donner, sans justifier, les éléments de $\mathcal{P}_3$ et en déduire que* $\text{card}(\mathcal{P}_3) = 16$.

▶

Il suffit de procéder comme à la question précédente en testant au brouillon les $3^3 = 27$ applications de $[\![1, 3]\!]$ dans $[\![1, 3]\!]$ une par une.

On a :

$$\boxed{\mathcal{P}_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,1), (1,2,2), (1,2,3), (1,3,1), (1,3,2), \\ (2,1,1), (2,1,2), (2,1,3), (2,2,1), (2,3,1), (3,1,1), (3,1,2), (3,2,1) \end{array} \right\}}$$

et donc $\boxed{\text{card}(\mathcal{P}_3) = 16}$.

2. *On note Θ l'application qui à chaque $s \in [\![1, n]\!]^n$ associe le n-uplet ayant les mêmes composantes que s réordonnées dans l'ordre croissant, par exemple pour $n = 6$: $\Theta(3, 5, 1, 2, 3, 2) = (1, 2, 2, 3, 3, 5)$.*

   (a) *Discuter brièvement de l'injectivité et de la surjectivité de l'application $\Theta : [\![1, n]\!]^n \to [\![1, n]\!]^n$.*

   ▶ L'application $\boxed{\Theta : [\![1, n]\!]^n \to [\![1, n]\!]^n \text{ n'est pas injective}}$ car il existe au moins deux n-uplets différents de $[\![1, n]\!]^n$ qui ont la même image par Θ : par exemple $s_1 = (1, 2, 1, 1, \ldots, 1)$ et $s_2 =$

$(2,1,1,1,\dots,1)$ sont tels que $\Theta(s_1)=\Theta(s_2)=s_1$. Et $\boxed{\Theta : [\![1,n]\!]^n \to [\![1,n]\!]^n \text{ n'est pas surjective}}$ car il existe au moins un n-uplet de $[\![1,n]\!]^n$ qui n'admet pas d'antécédents par Θ : par exemple $s_1=(1,2,1,1,\dots,1)$ n'admet pas d'antécédents puisque ses composantes ne sont pas ordonnées dans l'ordre croissant.

Attention : n est un entier quelconque dans l'énoncé. Il n'est donc pas suffisant de donner des contre-exemples pour une valeur de n fixée. Par exemple $\Theta(3,5,1,2,3,2)=\Theta(1,2,2,3,3,5)=(1,2,2,3,3,5)$ prouve seulement que $\Theta : [\![1,n]\!]^n \to [\![1,n]\!]^n$ n'est pas injective quand $n=6$, mais ce contre-exemple ne justifie rien pour les autres valeurs de n.

(b) *Dans les deux questions suivantes, on fixe $s=(s_1,s_2,\dots,s_n)\in[\![1,n]\!]^n$ et on note $t=(t_1,t_2,\dots,t_n)$ l'image de s par Θ. Ainsi on a $t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n$.*

i. *Pour cette question, on suppose que $t_k>k$ pour un certain $k\in[\![1,n]\!]$. En observant les vaches ayant les préférences $t_k,t_{k+1},\dots,t_n$, justifier que s n'est pas une fonction de parcage.*

▶ On raisonne par l'absurde en supposant que s est une fonction de parcage. Puisque t est croissante (en tant qu'image de s par Θ) et que $t_k>k$ (par hypothèse), on en déduit que chaque préférence $t_k,t_{k+1},\dots,t_n$ est strictement plus grande que k et donc que les vaches ayant ces préférences vont chacune occuper une stalle dont le numéro est compris entre $k+1$ et n. Ce qui fait un maximum de $n-(k+1)+1=n-k$ stalles pour $n-k+1$ vaches. Ceci est absurde d'après le principe des tiroirs puisque $n-k+1>n-k$. Donc $\boxed{s \text{ n'est pas une fonction de parcage}}$.

On peut également considérer l'application f qui a chaque vache associe la stalle qu'elle occupe avant le début de la traite. Si s est une fonction de parcage, alors cette application est (bien définie et) bijective. En particulier, la restriction de cette application à l'ensemble A des vaches ayant les préférences $t_k,t_{k+1},\dots,t_n$ est injective, donc $\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(f(A))$. Ce qui est absurde car $\mathrm{card}(A)=n-k+1$ et $\mathrm{card}(f(A))\leqslant n-k$.

ii. *Pour cette question, on suppose que s n'est pas une fonction de parcage et on note k le plus petit numéro des stalles qui restent inoccupées. En observant les vaches ayant les préférences $t_1,t_2,\dots,t_k$, justifier par l'absurde que $t_k>k$.*

▶ On raisonne par l'absurde en supposant que $t_k\leqslant k$. Puisque t est croissante (en tant qu'image de s par Θ), on en déduit que chaque préférence $t_1,t_2,\dots,t_k$ est inférieure ou égale à k. Or on a supposé que la stalle numéro k est vide, donc chaque préférence $t_1,t_2,\dots,t_k$ est en fait strictement inférieure à k (sinon au moins une des vaches ayant ces préférences se déplacerait directement dans la stalle numéro k). De plus, les vaches ayant ces préférences vont chacune occuper une stalle dont le numéro est compris entre 1 et $k-1$ avant le début de la traite (sinon une de ces vaches passerait devant la stalle numéro k qui est libre). Ce qui fait un maximum de $(k-1)-1+1=k-1$ stalles pour $k-1+1=k$ vaches. Ceci est absurde d'après le principe des tiroirs puisque $k>k-1$. Donc $\boxed{t_k>k}$.

De même, on peut également considérer l'application f qui a chaque vache associe la stalle qu'elle occupe avant le début de la traite. Si $t_k\leqslant k$, alors la restriction de cette application à l'ensemble B des vaches ayant les préférences $t_1,t_2,\dots,t_k$ est (bien définie) et injective, donc $\mathrm{card}(B)\leqslant\mathrm{card}(f(B))$. Ce qui est absurde car $\mathrm{card}(B)=k$ et $\mathrm{card}(f(B))\leqslant k-1$.

(c) *En déduire la description suivante de l'ensemble des fonctions de parcage :*

$$\boxed{\mathcal{P}_n=\left\{s\in[\![1,n]\!]^n \mid \forall k\in[\![1,n]\!],\ t_k\leqslant k \text{ où } (t_1,t_2,\dots,t_n)=\Theta(s)\right\}}.$$

▶ On pose

$$E=\left\{s\in[\![1,n]\!]^n \mid \forall k\in[\![1,n]\!],\ t_k\leqslant k \text{ où } (t_1,t_2,\dots,t_n)=\Theta(s)\right\}$$

et on raisonne par double inclusion pour montrer que $\mathcal{P}_n = E$.
1re inclusion : on fixe $s \in \mathcal{P}_n$. On note $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ l'image de s par Θ, c'est-à-dire $(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \Theta(s)$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $t_k > k$. D'après le résultat de la question 2(b)i, s n'est pas une fonction de parcage, ce qui est absurde puisque $s \in \mathcal{P}_n$. Par conséquent, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $t_k \leqslant k$. Ainsi on a montré que $s \in E$, ce qui est vrai pour tout $s \in \mathcal{P}_n$, donc $\mathcal{P}_n \subset E$.
2e inclusion : on fixe $s \in E$. Donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $t_k \leqslant k$ où $(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \Theta(s)$, c'est-à-dire où $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est l'image de s par Θ. Par l'absurde, on suppose que s n'est pas une fonction de parcage. D'après le résultat de la question 2(b)ii, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $t_k > k$, ce qui est absurde puisque $t_k \leqslant k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Par conséquent, s est une fonction de parcage. Ainsi on a montré que $s \in \mathcal{P}_n$, ce qui est vrai pour tout $s \in E$, donc $E \subset \mathcal{P}_n$.
Conclusion : par double inclusion, on a montré que $\mathcal{P}_n = E$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathcal{P}_n = \left\{ s \in [\![1, n]\!]^n \mid \forall k \in [\![1, n]\!],\ t_k \leqslant k \text{ où } (t_1, t_2, \ldots, t_n) = \Theta(s) \right\}}.$$

Démontrer cette égalité d'ensembles revient en fait à prouver l'équivalence suivante pour tout $s \in [\![1, n]\!]^n$ (en posant $(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \Theta(s)$) :

$$s \text{ est une fonction de parcage} \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ t_k \leqslant k.$$

Or le résultat de la question 2(b)i. est :

$$\exists k \in [\![1, n]\!],\ t_k > k \Longrightarrow s \text{ n'est pas une fonction de parcage}$$

et celui de la question 2(b)ii. est :

$$s \text{ n'est pas une fonction de parcage} \Longrightarrow \exists k \in [\![1, n]\!],\ t_k > k.$$

Il suffit donc d'écrire les contraposées et de raisonner par double implication.

3. *Pour chaque $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [\![1, n]\!]^n$ croissant, c'est-à-dire tel que $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n$, on note $\mathcal{A}_t$ l'ensemble des antécédents de t par l'application Θ, c'est-à-dire : $\mathcal{A}_t = \{s \in [\![1, n]\!]^n \mid \Theta(s) = t\}$. Par définition de l'application Θ, $\mathcal{A}_t$ est donc l'ensemble des n-uplets ayant les mêmes composantes que t dans un ordre quelconque, autrement dit $\mathcal{A}_t$ est l'ensemble des anagrammes de t.*
   (a) *Montrer que si $t \in [\![1, n]\!]^n$ et $t' \in [\![1, n]\!]^n$ sont distincts et croissants, alors $\mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_{t'} = \emptyset$.*
   ▶ Soient $t \in [\![1, n]\!]^n$ et $t' \in [\![1, n]\!]^n$ distincts et croissants. On suppose qu'il existe au moins un élément dans l'intersection $\mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_{t'}$ et on le note s. Alors $\Theta(s) = t$ (car $s \in \mathcal{A}_t$) et $\Theta(s) = t'$ (car $s \in \mathcal{A}_{t'}$). Par conséquent $t = t'$ ce qui est absurde car t et t' sont distincts. Ainsi il n'existe pas d'éléments dans l'intersection $\mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_{t'}$, autrement dit : $\boxed{\mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_{t'} = \emptyset}$.
   (b) *À l'aide du résultat de la question 2, montrer que si $t \in \mathcal{P}_n^+$, alors $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{P}_n$.*
   ▶ Soient $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{P}_n^+$ et $s \in \mathcal{A}_t$. Alors $\Theta(s) = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ par définition de $\mathcal{A}_t$. D'après le résultat de la question 2, il suffit de prouver que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ t_k \leqslant k$$

pour démontrer que $s \in \mathcal{P}_n$. Or t est une fonction de parcage croissante. Puisque t est croissante, $\Theta(t) = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ (car les composantes de t sont déjà ordonnées dans l'ordre croissant) Et puisque $t \in \mathcal{P}_n$, on déduit du résultat de la question 2 que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ t_k \leqslant k.$$

Finalement, on a bien montrer que $s \in \mathcal{P}_n$ pour tout $s \in \mathcal{A}_t$, donc $\boxed{\mathcal{A}_t \subset \mathcal{P}_n}$.

(c) *Prouver que l'union des ensembles $\mathcal{A}_t$ où t décrit $\mathcal{P}_n^+$ est égal à $\mathcal{P}_n$ et en déduire que*

$$\boxed{\operatorname{card}(\mathcal{P}_n) = \sum_{t\in\mathcal{P}_n^+} \operatorname{card}(\mathcal{A}_t)}.$$

▶ On raisonne par double inclusion pour montrer que $\bigcup_{t\in\mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t = \mathcal{P}_n$.
1^{re} inclusion : soit $s \in \bigcup_{t\in\mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t$. Donc il existe au moins un $t \in \mathcal{P}_n^+$ tel que $s \in \mathcal{A}_t$. Or $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{P}_n$ d'après le résultat de la question précédente, donc $s \in \mathcal{P}_n$. Puisque ceci est vrai pour tout $s \in \bigcup_{t\in\mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t$, on a montré que $\bigcup_{t\in\mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t \subset \mathcal{P}_n$.
2^e inclusion : soit $s \in \mathcal{P}_n$. Pour démontrer que $s \in \bigcup_{t\in\mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t$, il suffit de trouver au moins un $t \in \mathcal{P}_n^+$ tel que $s \in \mathcal{A}_t$. On pose $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) = \Theta(s)$. Ainsi $s \in \mathcal{A}_t$ par définition de $\mathcal{A}_t$. Il reste à prouver que $t \in \mathcal{P}_n^+$. Or t est croissante par définition de Θ. Et puisque $s \in \mathcal{P}_n$, on a d'après le résultat de la question 2 :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ t_k \leqslant k$$

Or $\Theta(t) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ (car t est croissante) donc $t \in \mathcal{P}_n$ d'après le résultat de la question 2. Ainsi t est une fonction de parcage croissante, c'est-à-dire $t \in \mathcal{P}_n^+$. Finalement, on a montré que $s \in \bigcup_{t\in\mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t$, ce qui est vrai pour tout $s \in \mathcal{P}_n$, donc $\mathcal{P}_n \subset \bigcup_{t\in\mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t$.
Conclusion : on a démontré par double inclusion que

$$\boxed{\bigcup_{t\in\mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t = \mathcal{P}_n}.$$

De plus, les ensembles de cette union sont deux à deux disjoints d'après le résultat de la question 3(a) donc :

$$\boxed{\operatorname{card}(\mathcal{P}_n) = \operatorname{card}\left(\bigcup_{t\in\mathcal{P}_n^+} \mathcal{A}_t\right) = \sum_{t\in\mathcal{P}_n^+} \operatorname{card}(\mathcal{A}_t)}.$$

N'oubliez pas de justifier que les ensembles de l'union sont deux à deux disjoints pour utiliser la formule permettant de calculer le cardinal d'une union comme la somme des cardinaux.

4. (a) *Écrire $\mathcal{P}_2$ sous la forme $\bigcup_{t\in\mathcal{P}_2^+} \mathcal{A}_t$ en déterminant $\mathcal{P}_2^+$ et chaque ensemble $\mathcal{A}_t$ où t décrit $\mathcal{P}_2^+$.*

▶ On a d'après le résultat de la question 1(b) :

$$\mathcal{P}_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}.$$

Parmi ces trois fonctions, seules $(1, 1)$ et $(1, 2)$ sont croissantes, donc :

$$\boxed{\mathcal{P}_2^+ = \{(1,1), (1,2)\}}.$$

De plus $\Theta(1, 1) = (1, 1)$, $\Theta(1, 2) = (1, 2)$ et $\Theta(2, 1) = (1, 2)$. On en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{A}_{(1,1)} = \{(1,1)\}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{A}_{(1,2)} = \{(1,2), (2,1)\}}.$$

On retrouve bien l'égalité $\mathcal{P}_2 = \bigcup_{t\in\mathcal{P}_2^+} \mathcal{A}_t$.

(b) *Même question pour $\mathcal{P}_3$.*

▶ On a d'après le résultat de la question 1(c) :

$$\mathcal{P}_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,1), (1,2,2), (1,2,3), (1,3,1), (1,3,2), \\ (2,1,1), (2,1,2), (2,1,3), (2,2,1), (2,3,1), (3,1,1), (3,1,2), (3,2,1) \end{array} \right\}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{P}_3^+ = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,2),(1,2,3)\}}$$

et que :

$$\boxed{\begin{array}{rl} \mathcal{A}_{(1,1,1)} &= \{(1,1,1)\} \\ \mathcal{A}_{(1,1,2)} &= \{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\} \\ \mathcal{A}_{(1,1,3)} &= \{(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1)\} \\ \mathcal{A}_{(1,2,2)} &= \{(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\} \\ \mathcal{A}_{(1,2,3)} &= \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\} \end{array}}.$$

On retrouve bien l'égalité $\mathcal{P}_3 = \bigcup_{t\in\mathcal{P}_3^+} \mathcal{A}_t$.

(c) *Dans les trois questions suivantes, on s'intéresse au cas $n = 4$.*

i. *À l'aide du résultat de la question 2, donner, sans justifier, les éléments de $\mathcal{P}_4^+$.*

▶

D'après le résultat de la question 2, une fonction croissante $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [\![1,n]\!]^n$ est de parcage si et seulement si $t_k \leqslant k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ (car $\Theta(t) = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$). Cette question consiste donc à dresser la liste de tous les quadruplets $t = (t_1,t_2,t_3,t_4) \in [\![1,4]\!]$ tels que $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$ (afin que t soit croissant) et tels que :

$$\begin{array}{ll} t_1 \leqslant 1 \text{ donc } t_1 = 1, & t_2 \leqslant 2 \text{ donc } t_2 \in \{1,2\}, \\ t_3 \leqslant 3 \text{ donc } t_3 \in [\![t_2, 3]\!] \text{ et} & t_4 \leqslant 4 \text{ donc } t_4 \in [\![t_3, 4]\!]. \end{array}$$

On a :

$$\boxed{\mathcal{P}_4^+ = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1,1),(1,1,1,2),(1,1,1,3),(1,1,1,4),(1,1,2,2),(1,1,2,3),(1,1,2,4), \\ (1,1,3,3),(1,1,3,4),(1,2,2,2),(1,2,2,3),(1,2,2,4),(1,2,3,3),(1,2,3,4) \end{array} \right\}}.$$

ii. *Pour chaque $t \in \mathcal{P}_4^+$, déterminer $\mathrm{card}(\mathcal{A}_t)$, c'est-à-dire le nombre d'anagrammes de t.*

▶ En dénombrant les anagrammes de chacun des éléments de $\mathcal{P}_4^+$ obtenus à la question précédente, on a :

$$\boxed{\mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,1,1,1)}) = \underbrace{\binom{4}{4}}_{\text{placement des «1»}} = 1},$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,1,1,2)}) = \mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,1,1,3)}) = \mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,1,1,4)}) \\ = \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{placement des «1»}} \times \underbrace{\binom{4-3}{1}}_{\text{placement du dernier chiffre}} = 4 \times 1 = 4\end{array}},$$

$$\boxed{\mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,1,2,2)}) = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{placement des «1»}} \times \underbrace{\binom{4-2}{2}}_{\text{placement des «2»}} = 6 \times 1 = 6},$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,1,2,3)}) = \mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,1,2,4)}) \\ = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{placement des «1»}} \times \underbrace{\binom{4-2}{1}}_{\text{placement du «2»}} \times \underbrace{\binom{4-2-1}{1}}_{\text{placement du dernier chiffre}} = 6 \times 2 \times 1 = 12\end{array}},$$

$$\boxed{\mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,1,3,3)}) = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{placement des «1»}} \times \underbrace{\binom{4-2}{2}}_{\text{placement des «3»}} = 6 \times 1 = 6},$$

$$\boxed{\mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,1,3,4)}) = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{placement des «1»}} \times \underbrace{\binom{4-2}{1}}_{\text{placement du «3»}} \times \underbrace{\binom{4-2-1}{1}}_{\text{placement du «4»}} = 6 \times 2 \times 1 = 12},$$

$$\boxed{\mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,2,2,2)}) = \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{placement du «1»}} \times \underbrace{\binom{4-1}{3}}_{\text{placement des «2»}} = 4 \times 1 = 4},$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,2,2,3)}) = \mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,2,2,4)})\\ &= \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{placement du «1»}} \times \underbrace{\binom{4-1}{2}}_{\text{placement des «2»}} \times \underbrace{\binom{4-1-2}{1}}_{\text{placement du dernier chiffre}} = 4 \times 3 \times 1 = 12\end{aligned}},$$

$$\boxed{\mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,2,3,3)}) = \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{placement du «1»}} \times \underbrace{\binom{4-1}{1}}_{\text{placement du «2»}} \times \underbrace{\binom{4-1-1}{2}}_{\text{placement des «3»}} = 4 \times 3 \times 1 = 12},$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{card}(\mathcal{A}_{(1,2,3,4)})\\ &= \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{placement du «1»}} \times \underbrace{\binom{4-1}{1}}_{\text{placement du «2»}} \times \underbrace{\binom{4-1-1}{1}}_{\text{placement du «3»}} \times \underbrace{\binom{4-1-1-1}{1}}_{\text{placement du «4»}} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24\end{aligned}}.$$

On retrouve bien sûr le nombre de permutations de quatre éléments différents pour le dénombrement des anagrammes de $(1, 2, 3, 4)$.

iii. *En déduire que* $\mathrm{card}(\mathcal{P}_4) = 125$.

► D'après le résultat de la question 3(c), on a :

$$\mathrm{card}\left(\mathcal{P}_4\right) = \sum_{t \in \mathcal{P}_4^+} \mathrm{card}\left(\mathcal{A}_t\right).$$

Pour calculer $\mathrm{card}(\mathcal{P}_4)$, il suffit donc de faire la somme de chacun des cardinaux obtenus à la question précédente :

$$\mathrm{card}\left(\mathcal{P}_4\right) = 1 + 3 \times 4 + 6 + 2 \times 12 + 6 + 12 + 4 + 2 \times 12 + 12 + 24 = \boxed{125}.$$

5. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$ et chaque $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, on définit les ensembles suivants :*

$$\mathcal{E}_n^i = \left\{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{P}_n^+ \mid t_n = i\right\} \text{ et } \mathcal{F}_{n+1}^{i,j} = \left\{(t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^+ \mid (t_n, t_{n+1}) = (i, j)\right\}.$$

De plus, on note E_n^i le cardinal de $\mathcal{E}_n^i$.

(a) *Calculer E_n^1 et E_n^{n+1}.*

► $\mathcal{E}_n^1$ est l'ensemble des fonctions de parcages croissantes $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ telles que $t_n = 1$. Puisque ces fonctions sont croissantes, on a $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n = 1$, donc $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 1$. Par conséquent, $(1, 1, \ldots, 1)$ est le seul élément de $\mathcal{E}_n^1$ et $\boxed{E_n^1 = \mathrm{card}(\mathcal{E}_n^1) = 1}$.

$\mathcal{E}_n^{n+1}$ est l'ensemble des fonctions de parcages croissantes $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ telles que $t_n = n+1$. Or l'ensemble $\mathcal{P}_n^+$ des fonctions de parcages croissantes est un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]^n$, donc $t_n \in [\![1, n]\!]$. En particulier t_n ne peut pas être égal à $n+1$. On en déduit que l'ensemble $\mathcal{E}_n^{n+1}$ est vide et que $\boxed{E_n^{n+1} = \mathrm{card}(\mathcal{E}_n^{n+1}) = 0}$.

(b) *Dans les quatre questions suivantes, on fixe $(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$ tel que $i \leqslant j$ et on pose :*

$$\varphi : \mathcal{E}_n^i \to \mathcal{F}_{n+1}^{i,j},\ (t_1,t_2,\dots,t_n) \mapsto (t_1,t_2,\dots,t_n,j).$$

i. *Justifier que si $(t_1,t_2,\dots,t_n) \in \mathcal{P}_n^+$, alors $(t_1,t_2,\dots,t_n,\ell) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$ pour tout $\ell \in [\![t_n,n+1]\!]$.*

▶ Soient $(t_1,t_2,\dots,t_n) \in \mathcal{P}_n^+$ et $\ell \in [\![t_n,n+1]\!]$. Donc $(t_1,t_2,\dots,t_n,\ell) \in [\![n+1]\!]^{n+1}$ est une fonction de parcage puisque les n premières vaches numérotées de 1 à n vont chacune occuper une stalle dont le numéro est compris entre 1 et n (car $(t_1,t_2,\dots,t_n)$ est une fonction de parcage), et la dernière vache de numéro $n+1$ se déplacera jusqu'à la dernière stalle de numéro $n+1$ qui est libre. De plus, $(t_1,t_2,\dots,t_n,\ell) \in [\![n+1]\!]^{n+1}$ est croissante puisque $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n$ (car $(t_1,t_2,\dots,t_n)$ est croissante) et $t_n \leqslant \ell$ (par hypothèse). Finalement, $\boxed{(t_1,t_2,\dots,t_n,\ell) \in \mathcal{P}_{n+1}^+}$.

ii. *En déduire que φ est bien définie, c'est-à-dire que $\varphi(t) \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$ pour tout $t \in \mathcal{E}_n^i$.*

▶ Soit $t = (t_1,t_2,\dots,t_n) \in \mathcal{E}_n^i$. Alors $\varphi(t) = (t_1,t_2,\dots,t_n,j)$. Pour prouver que $\varphi(t) \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$, il suffit de montrer que $(t_1,t_2,\dots,t_n,j) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$ et que $(t_n,j) = (i,j)$ par définition de $\mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$. Or, par définition de $\mathcal{E}_n^i$, on a $(t_1,t_2,\dots,t_n) \in \mathcal{P}_n^+$ et $t_n = i$. Donc $(t_1,t_2,\dots,t_n,j) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$ d'après le résultat de la question précédente (en posant $\ell = j \in [\![t_n,n+1]\!]$ car $j \in [\![1,n+1]\!]$, $i \leqslant j$ et $t_n = i$) et $(t_n,j) = (i,j)$. Finalement, on a bien montré que $\varphi(t) \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$ pour tout $t \in \mathcal{E}_n^i$, c'est-à-dire que $\boxed{\varphi \text{ est bien définie}}$.

iii. *Justifier que si $(t_1,t_2,\dots,t_n,t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$, alors $(t_1,t_2,\dots,t_n) \in \mathcal{P}_n^+$.*

▶ Soit $(t_1,t_2,\dots,t_n,t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$.

> *Attention : puisque $(t_1,t_2,\dots,t_n,t_{n+1}) \in [\![1,n+1]\!]^{n+1}$ on a seulement que $(t_1,t_2,\dots,t_n) \in [\![1,n+1]\!]^n$. La première chose à justifier est donc que $(t_1,t_2,\dots,t_n) \in [\![1,n]\!]^n$.*

On suppose par l'absurde que $(t_1,t_2,\dots,t_n) \notin [\![1,n]\!]^n$ alors au moins une de ces composantes est égale à $n+1$ et puisque $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant t_{n+1}$ (car $(t_1,t_2,\dots,t_n,t_{n+1})$ est croissante), on en déduit que $t_n = t_{n+1} = n+1$. Or ceci est absurde car sinon les deux dernières vaches de numéro n et $n+1$ se déplaceront jusqu'à la dernière stalle de numéro $n+1$ et la dernière vache de numéro $n+1$ ne trouvera pas de stalles libres. Par conséquent $(t_1,t_2,\dots,t_n) \in [\![1,n]\!]^n$. De plus $(t_1,t_2,\dots,t_n)$ est une fonction de parcage puisque $(t_1,t_2,\dots,t_n,t_{n+1})$ est une fonction de parcage et le raisonnement précédent prouve que la dernière stalle de numéro $n+1$ sera occupée par la dernière vache de numéro $n+1$ avant le début de la traite (donc les n premières vaches numérotées de 1 à n vont chacune occuper une stalle dont le numéro est compris entre 1 et n). Enfin $(t_1,t_2,\dots,t_n)$ puisque $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant t_{n+1}$ (car $(t_1,t_2,\dots,t_n,t_{n+1})$ est croissante). Finalement, $\boxed{(t_1,t_2,\dots,t_n) \in \mathcal{P}_n^+}$.

iv. *Montrer que $\varphi : \mathcal{E}_n^i \to \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$ est bijective et que $\operatorname{card}\left(\mathcal{F}_{n+1}^{i,j}\right) = E_n^i$.*

▶ Injectivité. Soient $t = (t_1,t_2,\dots,t_n) \in \mathcal{E}_n^i$ et $t' = (t'_1,t'_2,\dots,t'_n) \in \mathcal{E}_n^i$ tels que $\varphi(t) = \varphi(t')$. Alors :

$$(t_1,t_2,\dots,t_n,j) = \varphi(t_1,t_2,\dots,t_n) = \varphi(t) = \varphi(t') = \varphi(t'_1,t'_2,\dots,t'_n) = (t'_1,t'_2,\dots,t'_n,j).$$

Par identification des composantes, on en déduit que :

$$t_1 = t'_1, \quad t_2 = t'_2, \quad \dots, \quad t_n = t'_n \quad \text{et} \quad j = j.$$

En particulier, on obtient que $t = (t_1,t_2,\dots,t_n) = (t'_1,t'_2,\dots,t'_n) = t'$ et donc φ est injective.
Surjectivité. On fixe $t = (t_1,t_2,\dots,t_n,t_{n+1}) \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$ et on cherche $s =\in \mathcal{E}_n^i$ tel que $\varphi(s) = t$. On pose $s = (t_1,t_2,\dots,t_n)$. Par définition de $\mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$, on a $(t_1,t_2,\dots,t_n,t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$ et $(t_n,t_{n+1}) = (i,j)$. Donc $(t_1,t_2,\dots,t_n) \in \mathcal{P}_n^+$ d'après le résultat de la question précédente et $t_n = i$. Par conséquent $s = (t_1,t_2,\dots,t_n) \in \mathcal{E}_n^i$ par définition de $\mathcal{E}_n^i$. De plus :

$$\varphi(s) = \varphi(t_1,t_2,\dots,t_n) = (t_1,t_2,\dots,t_n,j) = (t_1,t_2,\dots,t_n,t_{n+1}) = t \quad \text{car } t_{n+1} = j.$$

Ainsi, on a bien trouvé $s = \in \mathcal{E}_n^i$ tel que $\varphi(s) = t$, donc φ est surjective.

Conclusion. Finalement $\boxed{\text{l'application } \varphi : \mathcal{E}_n^i \to \mathcal{F}_{n+1}^{i,j} \text{ est bijective}}$ et par conséquent :

$$\boxed{E_n^i = \text{card}\left(E_n^i\right) = \text{card}\left(\mathcal{F}_{n+1}^{i,j}\right)}.$$

(c) Pour cette question, on fixe $j \in [\![1, n+1]\!]$. Prouver que $\bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{F}_{n+1}^{i,j} = \mathcal{E}_{n+1}^j$ et en déduire que

$$E_{n+1}^j = \sum_{i=1}^{j} E_n^i.$$

► 1re inclusion. Soit $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}) \in \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$. Donc il existe au moins un $i \in [\![1, j]\!]$ tel que $t \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$. Par définition de $t \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$, on a $(t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^{+}$ et $(t_n, t_{n+1}) = (i, j)$. En particulier, on a $(t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^{+}$ et $t_{n+1} = j$, donc $t \in \mathcal{E}_{n+1}^j$ par définition de $\mathcal{E}_{n+1}^j$. Puisque ceci est vrai pour tout $t \in \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$, on en déduit que $\bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{F}_{n+1}^{i,j} \subset \mathcal{E}_{n+1}^j$.

2e inclusion. Soit $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{E}_{n+1}^j$. Par définition de $\mathcal{E}_{n+1}^j$, on a $(t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}) \in \mathcal{P}_{n+1}^{+}$ et $t_{n+1} = j$. On pose $i = t_n$. Puisque t est croissante, on a $i = t_n \leqslant t_{n+1} = j$ donc $i \in [\![1, j]\!]$. De plus $t \in \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$ par définition de $\mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$. Par conséquent $t \in \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$. Puisque ceci est vrai pour tout $t \in \mathcal{E}_{n+1}^j$, on en déduit que $\mathcal{E}_{n+1}^j \subset \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}$.

Conclusion. Par double inclusion, on a démontré que :

$$\boxed{\bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{F}_{n+1}^{i,j} = \mathcal{E}_{n+1}^j.}$$

De plus, les ensembles de cette union sont deux à deux disjoints car s'il existe au moins un élément $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1})$ dans l'intersection $\mathcal{F}_{n+1}^{i,j} \cap \mathcal{F}_{n+1}^{i',j}$ où $(i, i') \in [\![1, j]\!]^2$, alors $t_n = i = i'$. On en déduit que :

$$E_{n+1}^j = \text{card}\left(\mathcal{E}_{n+1}^j\right) = \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{F}_{n+1}^{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{j} \text{card}\left(\mathcal{F}_{n+1}^{i,j}\right).$$

Encore une fois, n'oubliez pas de justifier que les ensemble de l'union sont deux à deux disjoints pour utiliser la formule permettant de calculer le cardinal d'une union comme la somme des cardinaux.

Enfin, on obtient à l'aide du résultat de la question précédente :

$$\boxed{E_{n+1}^j = \sum_{i=1}^{j} E_n^i}.$$

(d) Montrer que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ \sum_{\ell=0}^{p} \binom{q+\ell}{\ell} = \binom{p+q+1}{p}$$

(indication : utiliser après l'avoir justifié que $\binom{q+\ell}{\ell} = \binom{q+\ell+1}{\ell} - \binom{q+\ell}{\ell-1}$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$).

► Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. D'après la formule de Pascal on a pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{q+\ell+1}{\ell} = \binom{q+\ell}{\ell} + \binom{q+\ell}{\ell-1} \quad \text{donc} \quad \binom{q+\ell}{\ell} = \binom{q+\ell+1}{\ell} - \binom{q+\ell}{\ell-1}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=0}^{p}\binom{q+\ell}{\ell}\\
&=\sum_{\ell=0}^{p}\left[\binom{q+\ell+1}{\ell}-\binom{q+\ell}{\ell-1}\right]\\
&=\left[\binom{q+1}{0}-\binom{q}{-1}\right]+\left[\binom{q+2}{1}-\binom{q+1}{0}\right]+\cdots+\left[\binom{q+p+1}{p}-\binom{q+p}{p-1}\right]\\
&=-\binom{q}{-1}+\binom{q+p+1}{p}\quad\text{(en reconnaissant une somme télescopique)}\\
&=\boxed{\binom{q+p+1}{p}}\quad\left(\text{car }\binom{q}{\ell}=0\text{ si }\ell<0\right).
\end{aligned}$$

(e) *À l'aide des résultats précédents, démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ on a :*

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ E_n^i=\binom{n+i-2}{i-1}-\binom{n+i-2}{i-2}.$$

▶ *Il faut reconnaître une récurrence forte ici.*

Initialisation. Soit $i\in[\![1,1]\!]$ donc $i=1$. D'après le résultat de la question 5(a) on a $E_1^1=1$. De plus :

$$\binom{1+1-2}{1-1}-\binom{1+1-2}{1-2}=\binom{0}{0}-\binom{0}{-1}=1-0=1.$$

Donc le résultat est vrai pour $n=1$.

Hérédité. On suppose le résultat vrai pour $n\in\mathbb{N}^\star$ fixé. Soit $i\in[\![1,n+1]\!]$. On a d'après le résultat de la question 5(c) :

$$E_{n+1}^i=\sum_{k=1}^{i}E_n^k.$$

Et on a par hypothèse de récurrence :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ E_n^k=\binom{n+k-2}{k-1}-\binom{n+k-2}{k-2}.$$

1er cas : $i\in[\![1,n]\!]$. Alors pour tout $k\in[\![1,i]\!]$ on a $k\in[\![1,n]\!]$ et donc :

$$\begin{aligned}
E_{n+1}^i&=\sum_{k=1}^{i}\left[\binom{n+k-2}{k-1}-\binom{n+k-2}{k-2}\right]\\
&=\sum_{k=1}^{i}\binom{n+k-2}{k-1}-\sum_{k=1}^{i}\binom{n+k-2}{k-2}\quad\text{(par linéarité de la somme)}\\
&=\sum_{\ell=0}^{i-1}\binom{n+\ell-1}{\ell}-\sum_{\ell'=-1}^{i-2}\binom{n+\ell'}{\ell'}\quad\text{(en posant }\ell=k-1\text{ et }\ell'=k-2)\\
&=\underbrace{\sum_{\ell=0}^{i-1}\binom{(n-1)+\ell}{\ell}}_{p=i-1\text{ et }q=n-1}-\underbrace{\sum_{\ell'=0}^{i-2}\binom{n+\ell'}{\ell'}}_{p=i-2\text{ et }q=n}-\underbrace{\binom{n-1}{-1}}_{=0}\\
&\text{on reconnaît la somme calculée à la question précédente}\\
&=\binom{(n-1)+(i-1)+1}{i-1}-\binom{n+(i-2)+1}{i-2}\\
&=\binom{(n+1)+i-2}{i-1}-\binom{(n+1)+i-2}{i-2}.
\end{aligned}$$

1^er^ cas : $i=n+1$. Alors :

$$E_{n+1}^{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}E_n^k=\sum_{k=1}^{n}E_n^k+E_n^{n+1}.$$

Or $E_n^{n+1}=0$ d'après le résultat de la question 5(a). Donc :

$$\begin{aligned}
E_{n+1}^{n+1}&=\sum_{k=1}^{n}E_n^k=E_{n+1}^n \quad \text{(d'après le résultat de la question 5(c))}\\
&=\binom{(n+1)+n-2}{n-1}-\binom{(n+1)+n-2}{n-2} \quad \text{(en utilisant le 1}^{\text{er}}\text{ cas pour } i=n)\\
&=\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n-2}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&\binom{(n+1)+(n+1)-2}{(n+1)-1}-\binom{(n+1)+(n+1)-2}{(n+1)-2}\\
=&\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}\\
=&\left[\binom{2n-1}{n}+\binom{2n-1}{n-1}\right]-\left[\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-1}{n-2}\right] \quad \text{(d'après la formule de Pascal)}\\
=&\binom{2n-1}{n}-\binom{2n-1}{n-2}\\
=&\binom{2n-1}{(2n-1)-n}-\binom{2n-1}{n-2} \quad \text{(par symétrie des coefficients binomiaux)}\\
=&\binom{n-1}{n}-\binom{2n-1}{n-2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$E_{n+1}^{n+1}=\binom{(n+1)+(n+1)-2}{(n+1)-1}-\binom{(n+1)+(n+1)-2}{(n+1)-2}.$$

Conclusion de la disjonction. On a montré dans tous les cas que :

$$E_{n+1}^{i}=\binom{(n+1)+i-2}{i-1}-\binom{(n+1)+i-2}{i-2}.$$

Et ceci est vrai pour tout $i\in[\![1,n+1]\!]$. Par conséquent, le résultat est vrai au rang $n+1$ dès qu'il est vrai au rang n.
Conclusion de la récurrence. D'après le principe de récurrence, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad \boxed{\forall i\in[\![1,n]\!],\ E_n^i=\binom{n+i-2}{i-1}-\binom{n+i-2}{i-2}}.$$

(f) Justifier brièvement que $\mathcal{P}_n^+$ est égal à l'union disjointe des $\mathcal{E}_n^1,\mathcal{E}_n^2,\dots,\mathcal{E}_n^n$, puis en déduire que

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right)=\sum_{i=1}^{n}E_n^i=\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n-2}.$$

► En raisonnant comme à la question 5(c), on peut démontrer par double inclusion que

$$\boxed{\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{E}_n^i=\mathcal{P}_n^+}.$$

De plus, comme à la question 5(c), les ensembles de cette union sont deux à deux disjoints. On en déduit que :

$$\text{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right) = \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{E}_n^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}\left(\mathcal{E}_n^i\right) = \sum_{i=1}^{n} E_n^i.$$

Puis on obtient en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\text{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right) &= \sum_{i=1}^{n} E_n^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n+i-2}{i-1} - \binom{n+i-2}{i-2}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n+i-2}{i-1} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n+i-2}{i-2} \quad \text{(par linéarité de la somme)} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n+\ell-1}{\ell} - \sum_{\ell'=-1}^{n-2} \binom{n+\ell'}{\ell'} \quad \text{(en posant } \ell = i-1 \text{ et } \ell' = i-2\text{)} \\
&= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{(n-1)+\ell}{\ell}}_{p=n-1 \text{ et } q=n-1} - \underbrace{\sum_{\ell'=0}^{n-2} \binom{n+\ell'}{\ell'}}_{p=n-2 \text{ et } q=n} - \underbrace{\binom{n-1}{-1}}_{=0} \\
&\quad \text{on reconnaît la somme calculée à la question 5(d)} \\
&= \binom{(n-1)+(n-1)+1}{n-1} - \binom{n+(n-2)+1}{n-2} \\
&= \boxed{\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2}}.
\end{aligned}$$

(g) *Conclure que*

$$\boxed{\text{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}.$$

► D'après le résultat de la question précédente et la définition des coefficients binomiaux, on a :

$$\begin{aligned}
\text{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right) &= \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2} \\
&= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!((2n-1)-(n-1))!} - \frac{(2n-1)!}{(n-2)!((2n-1)-(n-2))!} \\
&= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} - \frac{(2n-1)!}{(n-2)!(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)\times(2n-1)! - (n-1)\times(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{2\times(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} &= \frac{1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= \frac{2n \times (2n-1)!}{(n+1)\times n!(n-1)! \times n} = \frac{2\times(2n-1)!}{(n+1)!(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{card}\left(\mathcal{P}_n^+\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}.$$

6. (a) *À l'aide du résultat précédent, déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{P}_5^+$.*

▶ Pour $n = 5$, on a :

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{P}_5^+\right) = \frac{1}{6}\binom{10}{5} = \frac{252}{6} = \boxed{42}.$$

Pour calculer la valeur du coefficient binomial $\binom{10}{5}$, on peut soit dresser rapidement le triangle de Pascal jusqu'à la 10e ligne, soit (méthode encore plus rapide) utiliser la définition avec les factoriels :

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{2 \times 3 \times 4 \times 5} = 7 \times 4 \times 9 = 6 \times 42.$$

(b) *En s'inspirant de la question 4(c), expliquer comment on pourrait déterminer* $\operatorname{card}(\mathcal{P}_5)$.

▶ D'après le résultat de la question 3(c), on a :

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{P}_5\right) = \sum_{t \in \mathcal{P}_5^+} \operatorname{card}\left(\mathcal{A}_t\right).$$

Pour calculer $\operatorname{card}(\mathcal{P}_5)$, il suffit donc de calculer $\operatorname{card}(\mathcal{A}_t)$ pour chacune des 42 fonctions de parcage croissantes $t \in \mathcal{P}_5^+$, c'est-à-dire le nombre d'anagrammes de chacune des 42 fonctions de parcage croissantes, puis de faire la somme de chacun de ces cardinaux.

Pour les curieux, on obtient $\operatorname{card}(\mathcal{P}_5) = 1296$*. En fait, on peut démontrer avec un argument non présenté dans ce sujet que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \boxed{\operatorname{card}\left(\mathcal{P}_n\right) = (n+1)^{n-1}}.$$