Devoir surveillé 4 mathématiques

BCPST 1 2016-2017

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. On pose :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3 et $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Déterminer P^{-1} à l'aide de la méthode du pivot. On fera apparaître les différentes étapes du calcul. En déduire que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n en fonction de n, de B et de P.

Exercice 2. On veut résoudre l'équation différentielle

$$y" - 3y' + \frac{9}{4}y = e^{\frac{3}{2}x} \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation $y" - 3y' + \frac{9}{4}y = 0$.
2. Déterminer une solution de (E) de la forme $x :\mapsto \lambda x^2 e^{\frac{3}{2}x}$.
3. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 3.

1. À l'aide du changement de variable $u = \ln(x)$, montrer que

$$I = \int_1^e \ln(x)^2 dx = \int_0^1 u^2 e^u du.$$

2. En déduire la valeur de I. On pourra intégrer par partie deux fois la deuxième expression.

Problème : étude des fonctions trigonométriques hyperboliques

Dans tout ce problème, les fonctions ch et sh sont définies par :

$$\mathrm{ch}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array} \qquad \mathrm{sh}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array}$$

1. **Étude de fonctions.**
   (a) Justifier que les fonctions ch et sh sont dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer la dérivée de ch en fonction de sh et exprimer la dérivée de sh en fonction de ch.
   (b) Déterminer les tableaux de variations de ch et de sh. On y placera les limites aux infinis et la valeur de ces fonctions en 0.
   (c) Montrer que ch réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$ et calculer la réciproque sur cet intervalle.
   (d) Tracer de manière sommaire sur un même repère les graphes représentatives des deux fonctions. On fera attention à la position relative entre ces deux courbes.

2. **Équation différentielle et fonctions hyperboliques.**

   Dans les trois prochaines questions, on fixe $a > 0$.

   (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
   $$y" = a^2 y. \tag{E}$$

   (b) Montrer que Les fonctions de la forme $x \mapsto C \cdot \operatorname{ch}(ax) + D \cdot \operatorname{sh}(ax)$ avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$ sont solutions de (E).

   (c) Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = Ae^{ax} + B^{-ax}$. Montrer qu'il existe $(C, D) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = C \cdot \operatorname{ch}(ax) + D \cdot \operatorname{sh}(ax)$. On exprimera C et D en fonction de A et B.

3. **Calcul des intégrales $\int_0^a \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^n} dx$.**

   Pour tout $a \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose
   $$I_n(a) = \int_0^a \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^n} dx. \tag{1}$$

   (a) Soit $a \geq 0$. Calculer $I_0(a), I_1(a)$ (pour I_1, on pourra poser $u = e^x$). Déterminer $\lim\limits_{a \to +\infty} I_0(a)$, $\lim\limits_{a \to +\infty} I_1(a)$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\tanh(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$. Justifier que tanh est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1, \tanh'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$. En déduire les valeurs de $I_2(a)$ et de $\lim_{a \to +\infty} I_2(a)$.

   (c) Calcul de $I_3(a)$. On garde les notations précédentes.

      i. À l'aide d'une intégration par partie ($\frac{1}{\operatorname{ch}(x)^3} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^2} \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$), montrer que $I_3(a) = \dfrac{\tanh(a)}{\operatorname{ch}(a)} + I_1(a) - I_3(a)$..
      On pourra utiliser des résultats de la question 2.

      ii. En déduire la valeur de $\lim\limits_{a \to +\infty} I_3(a)$.