Devoir surveillé 4 mathématiques

BCPST 1 2016-2017

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. On pose :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3 et $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Déterminer P^{-1} à l'aide de la méthode du pivot. On fera apparaître les différentes étapes du calcul. En déduire que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer A^n en fonction de n, de B et de P.

Correction

1. En calculant A^2, A^3, on a :

$$A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -8 & 10 & 8 \\ -5 & 5 & 13 \end{pmatrix}, A^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -7 & 7 \\ -26 & 28 & 26 \\ -19 & 19 & 35 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0_3.$$

On en déduit que :

$$I_3 = \frac{1}{6}(A^3 - 6A^2 + 11A) = A\frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11I_3) = \frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11I_3)A.$$

Donc A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11I_3) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 4 & 8 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}}$$

2. Calcul de P^{-1} à l'aide de la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 : \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 : \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \tfrac{1}{2}L_3 : \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 : \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad L_2, L_3 \leftarrow -L_2, \tfrac{1}{2}L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

On a donc :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

En effectuant le produit $P^{-1}AP$ on obtient :

$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

3. On a donc : $A = PBP^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$P(n) : A^n = PB^nP^{-1}.$$

— Initialisation : Pour $n = 0$, on a $PB^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$. Donc $P(0)$ est vraie.
— Hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
On a $A^{n+1} = A^nA$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a $A^n = PB^nP^{-1}$. D'où

$$A^{n+1} = PB^nP^{-1}PBP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
— Conclusion : il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{A^n = PB^nP^{-1}}$.

Exercice 2. On veut résoudre l'équation différentielle

$$y" - 3y' + \frac{9}{4}y = e^{\frac{3}{2}x} \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation $y" - 3y' + \frac{9}{4}y = 0$.
2. Déterminer une solution de (E) de la forme $x :\mapsto \lambda x^2 e^{\frac{3}{2}x}$.
3. En déduire toutes les solutions de (E).

Correction

1. On reconnaît une équation différentielle linéaire de degré 2 homogène ayant comme équation caractéristique :

$$X^2 - 3X + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow (X - \frac{3}{2})^2 = 0$$

Cette équation admet comme unique solution $\frac{3}{2}$.
Les solutions de l'équation $y" - 3y' + \frac{9}{4}y = 0$ sont donc exactement les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto (A + Bx)e^{\frac{3}{2}x},}$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \lambda x^2 e^{\frac{3}{2}x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} f'(x) &= 2\lambda x e^{\frac{3}{2}x} + \tfrac{3}{2}\lambda x^2 e^{\frac{3}{2}x}. \\ f"(x) &= 2\lambda e^{\frac{3}{2}x} + 6\lambda x e^{\frac{3}{2}x} + \tfrac{9}{4}\lambda x^2 e^{\frac{3}{2}x} \end{aligned}$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f" - 3f' + \frac{9}{4}f)(x) = 2\lambda e^{\frac{3}{2}x}.$$

En prenant $\lambda = \frac{1}{2}$, on en déduit que f est solution de (E).

3. À l'aide du principe de superposition, on en déduit que toutes les solutions sont exactement de la forme :

$$\boxed{x \mapsto (A + Bx + \frac{1}{2})e^{\frac{3}{2}x}}$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. 1. À l'aide du changement de variable $u = \ln(x)$, montrer que

$$I = \int_1^e \ln(x)^2 dx = \int_0^1 u^2 e^u du.$$

2. En déduire la valeur de I. On pourra intégrer par partie deux fois la deuxième expression.

Correction

1. La fonction ln est de classe C^1 sur $[1, e]$ et sa dérivée ne s'annule pas sur ce segment. On a :

$$\begin{array}{ll} u = \ln(x) & du = \frac{dx}{x} \\ e^u = x & e^u du = dx \\ & u^2 e^u du = \ln(x)^2 dx \end{array}$$

Les bornes pour u sont $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$. Donc

$$\boxed{I = \int_0^1 u^2 e^u du.}$$

2. Les fonction $u \mapsto u^2$ et $u \mapsto e^u$ sont de classe C^2 sur $[0, 1]$. On peut donc appliquer la formule d'intégration par parties. D'où

$$I = [u^2 e^u]_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 2ue^u du.$$

De même, on a :

$$\int_0^1 ue^u du = [ue^u]_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 e^u du = e - (e - 1) = 1.$$

D'où

$$\boxed{I = e - 2.}$$

Problème : étude des fonctions trigonométriques hyperboliques

Dans tout ce problème, les fonctions ch et sh sont définies par :

$$\mathrm{ch} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \qquad \mathrm{sh} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

1. **Étude de fonctions.**
   (a) Justifier que les fonctions ch et sh sont dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer la dérivée de ch en fonction de sh et exprimer la dérivée de sh en fonction de ch.
   (b) Déterminer les tableaux de variations de ch et de sh. On y placera les limites aux infinis et la valeur de ces fonctions en 0.
   (c) Montrer que ch réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$ et calculer la réciproque sur cet intervalle.
   (d) Tracer de manière sommaire sur un même repère les graphes représentatives des deux fonctions. On fera attention à la position relative entre ces deux courbes.

Correction

(a) Les fonctions ch et sh étant des combinaisons linéaires de $x \mapsto e^x$ et de $x \mapsto e^{-x}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme fonctions usuelles et comme composée de la fonction exponentielle et d'une fonction affine, on en déduit qu'elles sont aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x), \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).}$$

(b) La fonction exp étant croissante et strictement positive, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x \leq e^{-x}) \Leftrightarrow (x \geq 0)$$

Donc pour tout $x\mathbb{R}, \mathrm{sh}(x) \geq 0 \Leftrightarrow \leq x \geq 0$ et ch est toujours positif. Calcul des limites : on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Par composition et somme, il en résulte que

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty, \lim_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty, \lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty, \lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty.$$

On obtient alors les tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$		$+$	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$		$+$		$+$	
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(c) La fonction ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et y est continue. De plus, $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$. Donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires, on en déduit que l'image $\mathrm{ch}([0, +\infty[) = [1, +\infty[$. Il en résulte que ch réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[1, +\infty[$.

Soit $y \geq 1$. Raisonnons une équivalence :

$$\begin{aligned} \tfrac{e^x + e^{-x}}{2} = y \quad &\Leftrightarrow \quad e^x + e^{-x} = 2y \\ &\Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \quad (e^{-x} > 0) \end{aligned}$$

Posons $X = e^x$. L'équation est alors équivalente à :

$$X^2 - 2yX + 1 = 0$$

avec $X > 0$. On reconnaît une équation du second degré. Calculons son discriminant :

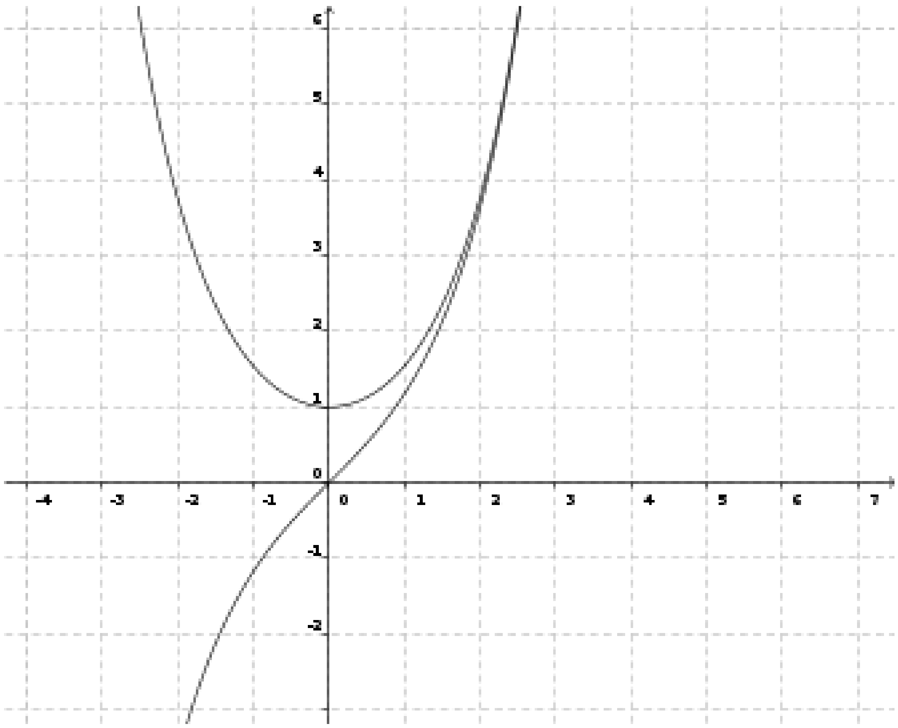
$$\Delta = 4y^2 - 4.$$

Or $y \geq 1$. Donc $\Delta \geq 0$. On a alors les solutions :

$$X_1 = y + \sqrt{y^2 - 1}, X_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}$$

Donc $x_1 = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ ou $x_2 = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}$. Or $y \geq 1$. Donc $X_1 \geq 0$. Or $X_1 X_2 = 1 \geq 0$. Donc X_1 et X_2 sont de même signe donc X_2 aussi est positif. Comme $y \geq 1$, on en déduit que $X_1 \geq 1$. Comme $X_1 X_2 = 1$, il en résulte que $X_2 \leq 1$. La solution à conserver est donc x_1. La réciproque est donc la fonction

$$\boxed{\begin{array}{rlcl} f : & [1, +\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ & y & \mapsto & \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \end{array}}$$

(d) 

2. **Équation différentielle et fonctions hyperboliques.**
   Dans les trois prochaines questions, on fixe $a > 0$.
   (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
   $$y" = a^2 y. \tag{E}$$
   (b) Montrer que Les fonctions de la forme $x \mapsto C \cdot \text{ch}(ax) + D \cdot \text{sh}(ax)$ avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$ sont solutions de (E).
   (c) Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = Ae^{ax} + B^{-ax}$. Montrer qu'il existe $(C, D) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C \cdot \text{ch}(ax) + D \cdot \text{sh}(ax)$. On exprimera C et D en fonction de A et B.

Correction

On utilisera dans cette partie la propriété suivante : $\text{sh}' = \text{ch}, \text{ch}' = \text{sh}$.

(a) On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 ayant comme équation caractéristique
$$X^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow X = a \text{ ou } X = -a.$$
Les solutions sont alors exactement de la forme
$$\boxed{x \mapsto Ae^{ax} + Be^{-ax}}$$
avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Soit $(C, D) \in \mathbb{R}^2$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C\text{ch}(ax) + D\text{sh}(ax)$. Par composition, et somme, f et f' sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On a :
$$f'(x) = a(C\text{sh}(ax) + D\text{ch}(ax))$$
Donc
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f"(x) = a^2(C\text{ch}(ax) + D\text{sh}(ax)) = a^2 f(x).}$$
Donc f vérifie bien (E).

(c) Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax}$. On a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(ax) + \text{sh}(ax) = e^{ax}, \text{ch}(ax) - \text{sh}(ax) = e^{-ax}.$$
D'où :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A(\text{ch}(ax) + \text{sh}(ax)) + B(\text{ch}(ax) - \text{sh}(ax)) = (A + B)\text{ch}(ax) + (A - B)\text{sh}(ax).$$
On a donc $\boxed{C = A + B, D = A - B}$.

3. **Calcul des intégrales $\int_0^a \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^n}dx$.**

Pour tout $a \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n(a) = \int_0^a \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^n}dx. \tag{1}$$

(a) Soit $a \geq 0$. Calculer $I_0(a), I_1(a)$ (pour I_1, on pourra poser $u = e^x$). Déterminer $\lim\limits_{a\to+\infty} I_0(a)$, $\lim\limits_{a\to+\infty} I_1(a)$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\tanh(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. Justifier que tanh est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1, \tanh'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$. En déduire les valeurs de $I_2(a)$ et de $\lim_{a\to+\infty} I_2(a)$.

(c) Calcul de $I_3(a)$. On garde les notations précédentes.

i. À l'aide d'une intégration par partie ($\frac{1}{\mathrm{ch}(x)^3} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$), montrer que $I_3(a) = \dfrac{\tanh(a)}{\mathrm{ch}(a)} + I_1(a) - I_3(a)$..
On pourra utiliser des résultats de la question 2.

ii. En déduire la valeur de $\lim\limits_{a\to+\infty} I_3(a)$.

Correction

On utilisera dans cette partie la propriété suivante : $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}, \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.

(a) On a $\boxed{I_0(a) = \int_0^a 1dx = a}$

Calculons $I_1(a) = \int_0^a \frac{2}{e^x+e^{-x}}dx$. Posons $u = e^x$. La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe C^1 sur $[0, a]$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $[0, a]$. On peut donc effectuer le changement de variable. On a :
$$u = e^x, du = e^x dx, \frac{du}{u} = dx$$
Donc
$$\frac{2}{e^x + e^{-x}}dx = \frac{2}{u^2+1}du$$
Voici les bornes sur u : 1 et e^a. On a alors :
$$I_1(a) = \int_1^{e^a} \frac{2}{u^2+1}du.$$
D'où :
$$\boxed{I_1(a) = 2(\arctan(e^a) - \arctan(1))}.$$
Lorsque a tend vers $+\infty$, $e^a \to +\infty$. De plus, lorsque x tend vers $+\infty$, $\arctan(x)$ tend vers $+\infty$. Il en résulte que par composition, $\lim\limits_{a\to+\infty} \arctan(e^a) = \frac{\pi}{2}$. Donc
$$\boxed{\lim_{a\to+\infty} I_1(a) = \frac{\pi}{2}.}$$

(b) La fonction tanh est quotient de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc tanh est C^1 sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \tanh'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} = \frac{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2}.$$
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)) = e^x e^{-x} = 1.$$
Donc
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \tanh'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}.}$$
On a donc
$$\boxed{I_2(a) = \int_0^a \tanh'(x)dx = \tanh(a) - \tanh(0) = \tanh(a).}$$

On a

$$\tanh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^a} = \frac{e^a(1 - e^{2a})}{e^a(1 + e^{2a})} = \frac{1 - e^{-2a}}{1 + e^{2a}}$$

Il en résulte que

$$\lim_{a \to +\infty} \tanh(a) = 1.$$

Donc

$$\lim_{a \to +\infty} I_2(a) = 1.$$

(c) i. On a

$$I_3(a) = \int_0^a \frac{1}{\mathrm{ch}^3(x)} dx$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^n}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée de $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ qui est C^1 sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et de ch qui est C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En particulier elles sont C^1 sur $[0, a]$. On peut donc effectuer une intégration par parties de I_3 de la manière suivante. On pose

$$\forall x \in [0, a], u = \tanh(x), v(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$$

On a alors

$$\forall x \in [0, a], u'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}, v'(x) = \frac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} = \frac{-\tanh(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} I_3(a) &= [\tfrac{\tanh(x)}{\mathrm{ch}(x)}]_{x=0}^{x=a} + \int_0^a \tfrac{\tanh(x)^2}{\mathrm{ch}(x)} dx \\ &= \tfrac{\tanh(a)}{\mathrm{ch}(a)} + \int_0^a \tfrac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^3} dx \end{aligned}$$

Or $\mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}(x)^2 - 1$. D'où

$$I_3(a) = \frac{\tanh(a)}{\mathrm{ch}(a)} + \int_0^a \frac{\mathrm{ch}(x)^2 - 1}{\mathrm{ch}(x)^3} dx$$

D'où

$$\boxed{I_3(a) = \frac{\tanh(a)}{\mathrm{ch}(a)} + I_1(a) - I_3(a).}$$

ii. On en déduit que

$$I_3(a) = \frac{\tanh(a)}{2\mathrm{ch}(a)} + \frac{I_1(a)}{2}.$$

Or on a vu que $\lim a \to +\infty \tanh(a) = 1$ et $\lim_{a \to +\infty} \mathrm{ch}(a) = +\infty$. De plus $\lim_{a \to +\infty} I_1(a) = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{a \to +\infty} I_3(a) = \frac{\pi}{4}.}$$