# Devoir surveillé 5 mathématiques

BCPST 1 2016-2017

---

- Durée : 3 heures et 30 minutes.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

---

**Exercice 1.** Soit $a \in ]0,1[$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -a & a-1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

1. On pose $N = M^t$ la transposée de $M$. Représenter $N$.
2. Calculer $P^{-1}$.
3. On pose $\Delta = P^{-1}NP$. Calculer $\Delta$.
4. Montrer sans calcul que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N^n = P\Delta^n P^{-1}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$N^n = \begin{pmatrix} \frac{a+(-a)^n}{a+1} & \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} - \frac{(-a)^n}{a+1} + \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} - \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2} \\ \frac{a+(-a)^{n+1}}{a+1} & \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} - \frac{(-a)^{n+1}}{a+1} + \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} - \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2} \\ \frac{a+(-a)^{n+1}}{a+1} & \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} - \frac{(-a)^{n+1}}{a+1} + \frac{(a-1)^{n}}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} - \frac{(a-1)^{n}}{a-2} \end{pmatrix}.$$

   En déduire la valeur de $M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer leur limite respective.

**Exercice 2.** Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, u_n = h_n - \ln(n).$$

1. Pour tout $x \geq 1$, montrer que $\frac{1}{x} \geq \ln(1+\frac{1}{x}) \geq \frac{1}{x+1}$.
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $0 \geq u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$.
3. En justifiant que $u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On note sa limite $\gamma$.
4. Justifier qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ de limite nulle telle que
$$h_n = \ln(n) + \gamma + \epsilon_n.$$
5. Soit $n \geq 1$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que $S_n = h_{2n} - h_n$.
6. Déduire des questions précédentes la limite de $(S_n)_{n\geq 1}$.

**Exercice 3.** On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, i, j, k)$. On considère trois plans d'équations respectives $x+y+z=1,\ 2x-y=0,\ 3x+z=1$.

1. Déterminer l'intersection de ces trois plans.
2. Déterminer une représentation paramétrique pour chacun de ces plans.

## Problème : calcul de $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

On cherche à établir le résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

La preuve présentée repose sur différentes identités trigonométriques et sur l'étude d'une famille de polynômes.

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\sin(\alpha)\neq 0$, on pose

$$\text{cotan}(\alpha)=\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

1. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.
   (a) Justifier que $\cos((2n+1)x)+i\sin((2n+1)x)=(\cos(x)+i\sin(x))^{2n+1}$ et en déduire que
   $$\cos((2n+1)x)+i\sin((2n+1)x)=\sum_{k=0}^{2n+1}i^k\binom{2n+1}{k}\sin(x)^k\cos(x)^{2n+1-k}.$$
   (b) En déduire que
   $$\sin((2n+1)x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\cos(x)^{2n+1-(2k+1)}\sin(x)^{2k+1}.$$
   (c) On suppose que $x\notin\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. Montrer que
   $$\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)^{2n+1}}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}(\text{cotan}(x)^2)^{n-k}.$$
2. Pour tout $n\geq 1$, on pose $P_n(X)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}X^{n-k}$. On cherche à déterminer les racines de $P_n$.
   (a) Montrer que la fonction cotan est injective sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.
   (b) Pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, on pose $x_k=\text{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2$. Montrer que $P_n(x_k)=0$.
   (c) En déduire que $P_n(X)=\lambda\Pi_{k=1}^{n}(X-x_k)$ où $\lambda$ est un complexe à déterminer.
3. On fixe $n\geq 1$. On garde les notations précédentes.
   (a) En remarquant que $-\lambda(\sum_{k=1}^{n}x_k)$ est égal au coefficient de $X^{n-1}$ de $P_n$, montrer que
   $$\sum_{k=1}^{n}\text{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2=\frac{n(2n-1)}{3}$$
   (b) Soit $x$ un réel. On suppose que $x\notin\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. Montrer que
   $$\frac{1}{\sin(x)^2}=1+\text{cotan}(x)^2.$$
   (c) En déduire que
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})^2}=\frac{2n(n+1)}{3}$$
4. Pour tout $n\geq 1$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.
   (a) Pour tout $y\in[0,\frac{\pi}{2}[$, montrer que
   $$\sin(y)\leq y\leq\tan(y).$$
   En déduire que pour tout $y\in]0,\frac{\pi}{2}[$
   $$\frac{1}{\sin(y)^2}\geq\frac{1}{y^2}\geq\text{cotan}(y)^2.$$
   (b) Soit $n\geq 1$. À l'aide de questions précédentes, montrer que
   $$\frac{2n(n+1)}{3}\geq\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2})\geq\frac{n(2n-1)}{3}.$$
   (c) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.