Devoir surveillé 5 mathématiques

BCPST 1 2016-2017

— Durée : 3 heures et 30 minutes.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Soit $a \in]0,1[$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -a & a-1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

1. On pose $N = M^t$ la transposée de M. Représenter N.
2. Calculer P^{-1}.
3. On pose $\Delta = P^{-1}NP$. Calculer Δ.
4. Montrer sans calcul que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N^n = P\Delta^n P^{-1}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$N^n = \begin{pmatrix} \frac{a+(-a)^n}{a+1} & \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} - \frac{(-a)^n}{a+1} + \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} - \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2} \\ \frac{a+(-a)^{n+1}}{a+1} & \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} - \frac{(-a)^{n+1}}{a+1} + \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} - \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2} \\ \frac{a+(-a)^{n+1}}{a+1} & \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} - \frac{(-a)^{n+1}}{a+1} + \frac{(a-1)^{n}}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} - \frac{(a-1)^{n}}{a-2} \end{pmatrix}.$$

   En déduire la valeur de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer leur limite respective.

Correction

1. On a $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ a & 0 & 1-a \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$
2. On a :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a+1} & \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} & \frac{a-1}{a-2} \\ \frac{1}{a+1} & \frac{-1}{a+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} \end{pmatrix}$$

3. On a :

$$\Delta = P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & (a-1) \end{pmatrix}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n) : N^n = P\Delta^n P^{-1}$. Démontrons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.
   — Initialisation : $N^0 = I$ et $P\Delta^0 P^{-1} = PIP^{-1} = I$. Donc $P(0)$ est vraie.
   — Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $N^n = P\Delta^n P^{-1}$. Donc $NN^n = NP\Delta^n P^{-1}$. Or $N = P\Delta P^{-1}$. Donc

$$N^{n+1} = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta^{n+1}P^{-1}.$$

   Donc $P(n+1)$ vraie.

— Conclusion : D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$N^n = P\Delta^n P^{-1}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n) : M^n = (N^n)^t$. Montrons que $P(n)$ est vraie par récurrence.
   — Initialisation : $N^0 = I$ et $M^0 = I$. Donc $P(0)$ est vraie.
   — Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $M^n = (N^n)^t$. Donc $MM^n = M(N^n)^t$. Or $M = N^t$. Donc $M^{n+1} = N^t(N^n)^t$. Or pour toute matrice carrée A, B de même taille, $(AB)^t = B^t A^t$. Donc

$$M^{n+1} = (N^n N)^t = (N^{n+1})^t.$$

   Donc $P(n+1)$ vraie.
   — Conclusion : D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = (N^n)^t.$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{a}{a+1} + \frac{(-a)^n}{a+1} & \frac{a}{a+1} + \frac{(-a)^{n+1}}{a+1} & \frac{a}{a+1} + \frac{(-a)^{n+1}}{a+1} \\ \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} - \frac{(-a)^n}{a+1} + \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2} & \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} - \frac{(-a)^{n+1}}{a+1} + \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2} & \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} - \frac{(-a)^{n+1}}{a+1} + \frac{(a-1)^n}{a-2} \\ \frac{a-1}{a-2} - \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} - \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} - \frac{(a-1)^n}{a-2} \end{pmatrix}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x_n = \frac{a}{a+1} + \frac{(-a)^n}{a+1}, y_n = \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} - \frac{(-a)^n}{a+1} + \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2}, z_n = \frac{a-1}{a-2} - \frac{(a-1)^{n+1}}{a-2}$$

   On a $0 < a < 1$. Donc $-1 < a-1 < 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} (-a)^n = 0, \lim_{n\to+\infty} (a-1)^n = 0.$$

   Par somme et multiplication, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{a}{a+1}, \lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)}, \lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{a-1}{a-2}.$$

Exercice 2. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, u_n = h_n - \ln(n).$$

1. Pour tout $x \geq 1$, montrer que $\frac{1}{x} \geq \ln(1 + \frac{1}{x}) \geq \frac{1}{x+1}$.
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $0 \geq u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$.
3. En justifiant que $u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq1}$ est convergente. On note sa limite γ.
4. Justifier qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\geq1}$ de limite nulle telle que

$$h_n = \ln(n) + \gamma + \epsilon_n.$$

5. Soit $n \geq 1$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que $S_n = h_{2n} - h_n$.
6. Déduire des questions précédentes la limite de $(S_n)_{n\geq1}$.

Correction

1. Étudions les variations des fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \ln(1+\frac{1}{x})$ et $g : x \mapsto \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$. En posant $h_1 : x \mapsto \ln(x)$, $h_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$, $h_3 : x \mapsto x+1$, ces fonctions sont C^1 sur $[1,+\infty[$ car ce sont respectivement la fonction logarithme, la fonction inverse, et une fonction affine. Or $f = h_2 - \ln(h_3 h_2)$ et $h_3 h_2 > 0$ sur $[1,+\infty[$. Donc f est bien C^1 comme différence, produit et composée de fonctions C^1. De même, $g = \ln(h3h_2) - h_2 \circ h_3$. Donc g est C^1 sur $[1,+\infty[$ comme différence, produit et composées de fonctions C^1. Calculons la dérivée de f :
$$\begin{array}{rcl} \forall x \geq 1, f'(x) &=& -\frac{1}{x^2} - \frac{(-\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x}} \\ &=& -\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2(1+x)} \\ &=& \frac{-x-1+x}{x^2(x+1)} \\ &=& \frac{-1}{x^2(x+1)} < 0 \end{array}$$
car $x \geq 1$. Donc la fonction f est décroissante sur $[1,+\infty[$ et $f(1) = 1 - \ln(2) \geq 0$. Donc pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 0$, donc $\frac{1}{x} \geq \ln(1+\frac{1}{x})$.
Calculons la dérivée de g :
$$\begin{array}{rcl} \forall x \geq 1, g'(x) &=& \frac{(-\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &=& \frac{-1}{x^2+x} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &=& \frac{1}{x+1}(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}) \leq 0 \end{array}$$
car $x \geq 1$. Donc la fonction g est décroissante sur $[1,+\infty[$. Or $\lim_{+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$. Donc $\lim_{+\infty} g = \ln(1) = 0$. Par décroissance de g sur $[1,+\infty[$, on en déduit que pour tout $x \geq 1, g(x) \geq 0$. Autrement dit, $\ln(1+\frac{1}{x}) \geq \frac{1}{x+1}$.
On a bien
$$\boxed{\forall x \geq 1, \frac{1}{x} \geq \ln(1+\frac{1}{x}) \geq \frac{1}{1+x}}.$$
Autre preuve :
Fixons $x \geq 1$. La fonction inverse est décroissante sur $[x, x+1]$. Donc
$$\forall t \in [x, x+1], \frac{1}{x} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{x+1}.$$
La fonction inverse étant continue sur $[x, x+1]$, elle est donc intégrable sur ce segment. Par croissance de l'intégrale, on obtient
$$\int_x^{x+1} \frac{1}{x} dt \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{x+1} dt.$$
D'où
$$\frac{1}{x} \geq \ln(1+x) - \ln(x) \geq \frac{1}{x+1}.$$
Autrement dit,
$$\boxed{\frac{1}{x} \geq \ln(1+\frac{1}{x}) \geq \frac{1}{x+1}.}$$

2. Soit $n \geq 1$. On a
$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n &=& h_{n+1} - \ln(n+1) - h_n + \ln(n) \\ &=& \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) \end{array}$$
Or, $n \geq 1$. D'après la question 1, on en déduit que $\boxed{u_{n+1} - u_n \leq 0}$.
De plus, $\ln(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$. D'où
$$-\ln(1+\frac{1}{n}) \geq -\frac{1}{n}$$
Donc
$$\frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}.$$
Autrement dit,
$$\boxed{u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}.$$

3. Soit $n \geq 1$. Fixons $k \in 1, \cdots, n-1$. On a
$$0 \geq u_{k+1} - u_k \geq \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}.$$
En sommant sur $\{1, \cdots, n-1\}$, on obtient
$$0 \geq \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \geq \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}).$$
On reconnaît des sommes télescopiques, d'où
$$0 \geq u_n - u_1 \geq \frac{1}{n} - 1.$$
Or $u_1 = 1$. Donc
$$1 \geq u_n \geq \frac{1}{n} \geq 0.$$
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.

4. On note $\epsilon_n = u_n - \gamma$. La suite $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ est donc de limite nulle. On a
$$\forall n \geq 1, h_n = h_n - \ln(n) + \ln(n) = u_n + \ln(n) = u_n - \gamma + \gamma + \ln(n) = \epsilon_n + \gamma + \ln(n).$$
Donc la suite $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ existe bien.

5. Soit $n \geq 1$. On a
$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
D'où
$$S_n = \sum_{\substack{k=1,\\ \text{k impair}}}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1,\\ \text{k pair}}}^{2n} \frac{1}{k}$$
Par conséquent
$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{\substack{k=1,\\ \text{k pair}}}^{2n} \frac{1}{k}.$$
Effectuons le changement de variable $k = 2k'$ dans la somme de droite, on a alors $2 \leq k \leq 2n \Leftrightarrow 1 \leq k' \leq n$. D'où
$$S_n = h_{2n} - 2\frac{1}{2}h_n.$$
Autrement dit,
$$\boxed{S_n = h_{2n} - h_n.}$$

6. Soit $n \geq 1$. On a
$$S_n = h_{2n} - h_n.$$
D'après la question 5, on en déduit que
$$S_n = \ln(2n) + \gamma + \epsilon_{2n} - \ln(n) - \gamma - \epsilon_n.$$
Donc
$$S_n = \ln(2) + \epsilon_{2n} - \epsilon_n.$$
Or $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_{2n} = 0$. Par somme, on en déduit que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\ln(2)$.

Exercice 3. On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, i, j, k)$. On considère trois plans d'équations respectives $x + y + z = 1,\ 2x - y = 0,\ 3x + z = 1$.

1. Déterminer l'intersection de ces trois plans.
2. Déterminer une représentation paramétrique pour chacun de ces plans.

Correction

Déterminer l'intersection revient à déterminer les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 1 \\ 2x-y & = & 0 \\ 3x+z & = & 1. \end{array}\right.$$

En substituant y par $2x$, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x+z & = & 1 \\ y & = & 2x \\ 3x+z & = & 1 \end{array}\right.$$

En considérant x comme un paramètre, on obtient comme ensemble solutions

$$\boxed{S = \{(t, 2t, 1-3t), t \in \mathbb{R}\}.}$$

L'intersection correspond donc à une droite. Déterminons des représentations paramétriques pour les différents plans.

$x+y+z=1 \Leftrightarrow z = 1-x-y$. En considérant x et y comme des paramètres t et t' on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & t' \\ z & = & 1-t-t' \end{array}\right.$$

De même, $2x-y=0 \Leftrightarrow y=2x$. En considérant x et z comme des paramètres t et t' on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 2t \\ z & = & t' \end{array}\right.$$

De même, $3x+z=0 \Leftrightarrow z=-3x$. En considérant x et y comme des paramètres t et t' on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & t' \\ z & = & -3t \end{array}\right.$$

Problème : calcul de $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

On cherche à établir le résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

La preuve présentée repose sur différentes identités trigonométriques et sur l'étude d'une famille de polynômes.

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\sin(\alpha)\neq 0$, on pose

$$\operatorname{cotan}(\alpha)=\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

1. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.
   (a) Justifier que $\cos((2n+1)x)+i\sin((2n+1)x)=(\cos(x)+i\sin(x))^{2n+1}$ et en déduire que
   $$\cos((2n+1)x)+i\sin((2n+1)x)=\sum_{k=0}^{2n+1}i^k\binom{2n+1}{k}\sin(x)^k\cos(x)^{2n+1-k}.$$
   (b) En déduire que
   $$\sin((2n+1)x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\cos(x)^{2n+1-(2k+1)}\sin(x)^{2k+1}.$$
   (c) On suppose que $x\notin\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. Montrer que
   $$\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)^{2n+1}}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}(\operatorname{cotan}(x)^2)^{n-k}.$$
2. Pour tout $n\geq 1$, on pose $P_n(X)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}X^{n-k}$. On cherche à déterminer les racines de P_n.
   (a) Montrer que la fonction cotan est injective sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.
   (b) Pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, on pose $x_k=\operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2$. Montrer que $P_n(x_k)=0$.
   (c) En déduire que $P_n(X)=\lambda\Pi_{k=1}^{n}(X-x_k)$ où λ est un complexe à déterminer.
3. On fixe $n\geq 1$. On garde les notations précédentes.
   (a) En remarquant que $-\lambda(\sum_{k=1}^{n}x_k)$ est égal au coefficient de X^{n-1} de P_n, montrer que
   $$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2=\frac{n(2n-1)}{3}$$
   (b) Soit x un réel. On suppose que $x\notin\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. Montrer que
   $$\frac{1}{\sin(x)^2}=1+\operatorname{cotan}(x)^2.$$
   (c) En déduire que
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})^2}=\frac{2n(n+1)}{3}$$
4. Pour tout $n\geq 1$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.
   (a) Pour tout $y\in[0,\frac{\pi}{2}[$, montrer que
   $$\sin(y)\leq y\leq\tan(y).$$
   En déduire que pour tout $y\in]0,\frac{\pi}{2}[$
   $$\frac{1}{\sin(y)^2}\geq\frac{1}{y^2}\geq\operatorname{cotan}(y)^2.$$

(b) Soit $n \geq 1$. À l'aide de questions précédentes, montrer que

$$\frac{2n(n+1)}{3} \geq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}) \geq \frac{n(2n-1)}{3}.$$

(c) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

1. (a) Par définition, $\cos((2n+1)x) + i\sin((2n+1)x) = e^{(2n+1)ix} = (e^{ix})^{2n+1}$. Or $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Donc

$$\boxed{\cos((2n+1)x) + i\sin((2n+1)x) = (\cos(x) + i\sin(x))^{2n+1}}.$$

En appliquant la formule du binôme au membre droit, on obtient

$$\boxed{\cos((2n+1)x) + i\sin((2n+1)x) = \sum_{k=0}^{2n+1} i^k \binom{2n+1}{k} \sin(x)^k \cos(x)^{2n+1-k}.}$$

(b) Séparons le membre droit en partie “indices paires” et “indices impaires. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=0}^{2n+1} i^k \binom{2n+1}{k} \sin(x)^k \cos(x)^{2n+1-k} &= \textstyle\sum_{k=0,\text{k, pair}}^{2n+1} i^k \binom{2n+1}{k} \sin(x)^k \cos(x)^{2n+1-k} \\ &+ \textstyle\sum_{k=0,\text{k, impair}}^{2n+1} i^k \binom{2n+1}{k} \sin(x)^k \cos(x)^{2n+1-k}\end{aligned}$$

Pour la somme des termes d'indices paires, on effectue le changement de variable $k = 2k'$. On a : $0 \leq 2k' \leq 2n+1 \Leftrightarrow 0 \leq k' \leq n$.

De même, pour la somme des termes d'indices impaires, on effectue le changement de variable $k = 2k'+1$. On a $0 \leq 2k'+1 \leq 2n+1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq k' \leq n$. Mais $k' \in \mathbb{N}$. Donc les bornes pour k' sont 0 et n. On a donc :

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{\substack{k=0\\ \text{k, pair}}}^{2n+1} i^k \binom{2n+1}{k} \sin(x)^k \cos(x)^{2n+1-k} &= \textstyle\sum_{k'=0}^{n} i^{2k'} \binom{2n+1}{2k'} \sin(x)^{2k} \cos(x)^{2n+1-2k} \\ &= \textstyle\sum_{k'=0}^{n} (-1)^{k'} \binom{2n+1}{2k'} \sin(x)^{2k'} \cos(x)^{2n+1-2k'}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{\substack{k=0\\ \text{k, impair}}}^{2n+1} i^k \binom{2n+1}{k} \sin(x)^k \cos(x)^{2n+1-k} &= \textstyle\sum_{k'=0}^{n} i^{2k'+1} \binom{2n+1}{2k'+1} \sin(x)^{2k'+1} \cos(x)^{2n-2k'} \\ &= i\left(\textstyle\sum_{k'=0}^{n} (-1)^{k'} \binom{2n+1}{2k'+1} \sin(x)^{2k'+1} \cos(x)^{2n-2k'}\right).\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\cos((2n+1)x) + i\sin((2n+1)x) &= \textstyle\sum_{k'=0}^{n} (-1)^{k'} \binom{2n+1}{2k'} \sin(x)^{2k'} \cos(x)^{2n+1-2k'} \\ &+ i\left(\textstyle\sum_{k'=0}^{n} (-1)^{k'} \binom{2n+1}{2k'+1} \sin(x)^{2k'+1} \cos(x)^{2n-2k}\right).\end{aligned}$$

Par unicité de l'écriture d'un complexe sous forme algébrique, il en résulte que :

$$\boxed{\sin((2n+1)x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \cos(x)^{2n-2k} \sin(x)^{2k+1}.}$$

(c) On suppose que $x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Donc $\sin(x) \neq 0$. En divisant par $\sin(x)^{2n+1}$ l'égalité de la question 1.c, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)^{2n+1}} &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \cos(x)^{2n-2k} \sin(x)^{2k+1-2n-1} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \left(\frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2}\right)^{n-k} \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} (\text{cotan}(x)^2)^{n-k}}.\end{aligned}$$

2. (a) cotan est le quotient de cos par sin et le dénominateur ne s'annule par sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc cotan est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Calculons sa dérivée :

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \text{cotan}'(x) = \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)^2}.$$

Or sin et cos sont strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc cotan$'$ est strictement négative sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc cotan est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc cotan est injective sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

(b) Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$. Constatons que $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $x_k = \text{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2$ est bien définie. Calculons $P_n(x_k)$:

$$\begin{array}{lrcll} \text{par définition,} & P_n(x_k) & = & \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{2n+1}{2i+1}(\text{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2)^{n-i} & \\ \text{en appliquant l'égalité de la question 1.c,} & & = & \frac{\sin(\frac{(2n+1)k\pi}{2n+1})}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})^{2n+1}} & (\sin(\frac{k\pi}{2n+1}) \neq 0) \\ & & = & \frac{\sin(k\pi)}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})^{2n+1}} & \\ & & = & 0 & (\sin(k\pi) = 0). \end{array}$$

(c) Les éléments $\frac{k\pi}{2n+1}$ avec $k \in \{1, \cdots, n\}$ sont distincts deux à deux. cotan étant injective (question 2.a), il en résulte que les x_k avec $k \in \{1, \cdots, n\}$ sont distincts deux à deux. Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, x_k est racine de P_n. On a donc n racines distinctes 2 à 2 de P_n. Or P_n est de degré n. On a donc toutes les racines de P_n. Donc P_n s'écrit sous la forme :

$$P_n(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$$

où λ est un réel. Plus précisément, λ est le coefficient dominant de P_n. Or celui-ci est égal à $\binom{2n+1}{1} = (2n+1)$. On a donc

$$\boxed{P_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(X - x_k).}$$

3. (a) En développant le membre droit de P_n, on constate que le coefficient de X^{n-1} est $-\lambda(\sum_{k=1}^{n} x_k)$. Ainsi,

$$-(2n+1)\left(\sum_{k=1}^{n}\text{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2\right) = -\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}$$

Donc

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\text{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2\right) = \frac{(2n-1)2n}{6} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

(b) Soit x un réel. On suppose que $x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Donc $\sin(x) \neq 0$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} 1 + \text{cotan}(x)^2 & = & 1 + \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2} \\ & = & \frac{\sin(x)^2}{\sin(x)^2} + \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2} \\ & = & \frac{1}{\sin(x)^2}. \end{array}$$

Donc

$$\boxed{1 + \text{cotan}(x)^2 = \frac{1}{\sin(x)^2}}.$$

(c) Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, on sait que $\frac{k\pi}{2n+1} \in\notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On a donc :

$$\frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})^2} = 1 + \text{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2.$$

En sommant pour k allant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})^2} = \sum_{k=1}^{n}(1+\operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2).$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})^2} = n + \sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2.$$

Or d'après la question 3.a, $\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2 = \frac{n(2n-1)}{3}$. D'où

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})^2} = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{n(3+2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.}$$

4. (a) Étudions les fonctions $f : y \mapsto y - \sin(y)$ et $g : y \mapsto \tan(y) - y$. Elles sont dérivables sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ car différence d'une fonction trigonométrique avec la fonction identité. Calculons leur dérivée respective :

$$\forall y \in [0, \frac{\pi}{2}[, f'(y) = 1 - \cos(y) \geq 0, g'(y) = 1 + \tan(y)^2 - 1 = \tan(y)^2 \geq 0.$$

Donc ces fonctions sont croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout $y \in [0, \frac{\pi}{2}[$:

$$f(0) \leq f(y), g(0) \leq g(y).$$

Donc

$$0 \leq f(y), 0 \leq g(y).$$

D'où

$$\boxed{\sin(y) \leq y \leq \tan(y).}$$

Pour tout $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$0 < \sin(y) \leq y \leq \tan(y).$$

La fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc

$$0 < \sin(y)^2 \leq y^2 \leq \tan(y)^2.$$

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on a donc

$$\frac{1}{\sin(y)^2} \geq \frac{1}{y^2} \geq \frac{1}{\tan(y)^2}.$$

D'où

$$\boxed{\frac{1}{\sin(y)^2} \geq \frac{1}{y^2} \geq \operatorname{cotan}(y)^2}.$$

(b) Soit $n \geq 1$. Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$. Il est clair que l'on a

$$\frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})^2} \geq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2} \geq \operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2.$$

En sommant sur $\{1, \cdots, n\}$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})^2} \geq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}) \geq \sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1})^2.$$

En appliquant les résultats des question 3.a et 3.c, on obtient :

$$\boxed{\frac{2n(n+1)}{3} \geq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}) \geq \frac{n(2n-1)}{3}.}$$

(c) En divisant les inégalités de la question 4.c par $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$:

$$\boxed{\frac{\pi^2 2n(n+1)}{3(2n+1)^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}.}$$

On a Les suites de termes généraux $n(n+1)$ et $(2n+1)^2, 2n(2n-1)$ sont polynomiales donc équivalents à leur termes de plus au degré :

$$n(n+1) \sim n^2, (2n+1)^2 \sim 4n^2, 2n(2n-1) \sim 4n^2$$

Donc

$$\frac{\pi^2 2n(n+1)}{3(2n+1)^2} \sim \frac{\pi^2 2n^2}{3 \cdot 4n^2} \sim \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2} \sim \frac{\pi^2 2n^2}{3 \cdot 4n^2} \sim \frac{\pi^2}{6}.$$

Les termes extrémaux de l'inégalité convergent donc vers $\frac{\pi^2}{6}$. D'après le théorème d'encadrement, il en vient que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge et a pour limite $\frac{\pi^2}{6}$.