DS n° 6 de mathématiques

durée : 2 heures et 30 minutes

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Exercice 1

Cet exercice propose d'étudier les déplacements d'une souris qui cherche un morceau de fromage dans un labyrinthe. À l'instant initial, on place la souris à l'entrée E (voir la figure 1). Ensuite elle choisit aléatoirement et avec la même probabilité un des trois chemins partant de E. Après son premier déplacement, elle peut :

— soit être revenue à l'entrée E et dans ce cas elle recommence en choisissant avec la même probabilité un des trois chemins partant de E pour son prochain déplacement ;

— soit avoir trouvé le bon chemin qui mène au fromage F et dans ce cas elle ne se déplace plus et reste au même endroit pour manger le fromage.

On note $n \in \mathbb{N}$ le nombre de déplacements de la souris, E_n l'événement que la souris se situe à l'entrée E après le n-ième déplacement, F_n l'événement que la souris soit en train de manger le fromage F après le n-ième déplacement et f_n la probabilité de l'événement F_n. Ainsi $\mathrm{f}_0 = 0$ et $\mathrm{f}_1 = \frac{1}{3}$.

1. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{E_n}(F_{n+1})$ et $P_{F_n}(F_{n+1})$ à l'aide de l'énoncé.
2. Montrer que $\mathrm{f}_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{f}_n$.
3. En déduire l'expression de f_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{f}_n$ et interpréter le résultat.

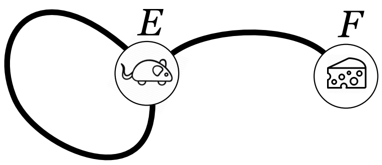

Figure 1

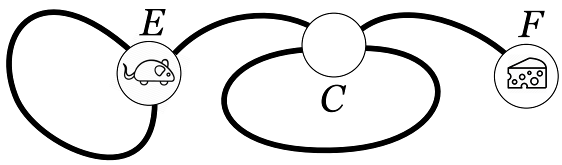

Figure 2

À l'instant initial, on place désormais la souris à l'entrée E d'un second labyrinthe (voir la figure 2) qui contient, en plus du fromage F, un croisement C. Lorsque la souris arrive après un déplacement au croisement C, elle choisit aléatoirement et avec la même probabilité un des quatre chemins partant de C pour son prochain déplacement. De plus, on note C_n l'événement que la souris se situe au croisement C après le n-ième déplacement et c_n la probabilité de l'événement C_n. Ainsi $c_0 = \mathrm{f}_0 = 0$, $c_1 = \frac{1}{3}$ et $\mathrm{f}_1 = 0$.

5. Déterminer les probabilités $P_{E_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(C_{n+1})$, $P_{F_n}(C_{n+1})$, $P_{E_n}(F_{n+1})$, $P_{C_n}(F_{n+1})$ et $P_{F_n}(F_{n+1})$.
6. Montrer que $c_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}c_n - \frac{1}{3}\mathrm{f}_n$ et $\mathrm{f}_{n+1} = \frac{1}{4}c_n + \mathrm{f}_n$.
7. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ afin que la suite $(u_n = \mathrm{f}_n - \alpha)_{n\geqslant 0}$ soit récurrente linéaire d'ordre 2.
8. En déduire que $\mathrm{f}_n = 1 - \left(\frac{5\sqrt{13}+13}{26}\right)\left(\frac{7+\sqrt{13}}{12}\right)^n + \left(\frac{5\sqrt{13}-13}{26}\right)\left(\frac{7-\sqrt{13}}{12}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{f}_n$ (en justifiant précisément chaque affirmation utilisée) et interpréter le résultat.

Exercice 2

Pour chaque $x > 0$ fixé, on considère l'équation suivante d'inconnue $y > 0$.

$$x \ln(x) = y \ln(y) \tag{E}$$

Le but de cet exercice est d'étudier les solutions de (E) en fonction des valeurs de $x > 0$.

1. On considère la fonction $f : t \mapsto t \ln(t)$.
   (a) Déterminer $\lim_{t \to 0} f(t)$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t)$.
   (b) Dresser le tableau des variations de f et y faire figurer l'image de $t = 1$.
2. On fixe $x > 0$ pour cette question et on pose $g_x : y \mapsto f(y) - f(x)$.
   (a) Dresser le tableau des variations de g_x et y faire figurer l'image de $y = 1$.
   (b) Démontrer chacun des points suivants.
      i. Si $x \in]0, \frac{1}{e}[$ alors (E) a deux solutions : x dans $]0, \frac{1}{e}[$ et une solution dans $]\frac{1}{e}, 1[$ notée $\varphi_1(x)$.
      ii. Si $x = \frac{1}{e}$ alors (E) a une seule solution : $x = \frac{1}{e}$.
      iii. Si $x \in]\frac{1}{e}, 1[$ alors (E) a deux solutions : une solution dans $]0, \frac{1}{e}[$ notée $\varphi_2(x)$ et x dans $]\frac{1}{e}, 1[$.
      iv. Si $x \in [1, +\infty[$ alors (E) a une seule solution : x dans $[1, +\infty[$.
3. On étudie l'application $\varphi_1 :]0, \frac{1}{e}[\to]\frac{1}{e}, 1[$ dans cette question.
   (a) Montrer que $f(\varphi_1(x)) > f(\varphi_1(x'))$ si $0 < x < x' < \frac{1}{e}$, puis en déduire que φ_1 est décroissante.
   (b) Justifier que φ_1 admet des limites finies en 0 et en $\frac{1}{e}$, puis les déterminer.
4. On étudie l'application $\varphi_2 :]\frac{1}{e}, 1[\to]0, \frac{1}{e}[$ dans cette question.
   (a) Montrer que $f(\varphi_2(\varphi_1(x))) = f(x)$ si $x \in]0, \frac{1}{e}[$ et que $f(\varphi_1(\varphi_2(x))) = f(x)$ si $x \in]\frac{1}{e}, 1[$.
   (b) En déduire que φ_2 est la bijection inverse de φ_1, puis dresser le tableau des variations de φ_2.
5. Discuter du prolongement par continuité sur $[0, 1]$ de la fonction suivante :

$$\varphi :]0, 1[\setminus \{\tfrac{1}{e}\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \varphi_1(x) \text{ si } x \in]0, \frac{1}{e}[\\ \varphi_2(x) \text{ si } x \in]\frac{1}{e}, 1[\end{cases}.$$