Corrigé du DS n$^{\text{o}}$ 6 de mathématiques

Exercice 1

Cet exercice propose d'étudier les déplacements d'une souris qui cherche un morceau de fromage dans un labyrinthe. À l'instant initial, on place la souris à l'entrée E (voir la figure 1). Ensuite elle choisit aléatoirement et avec la même probabilité un des trois chemins partant de E. Après son premier déplacement, elle peut :

- *soit être revenue à l'entrée E et dans ce cas elle recommence en choisissant avec la même probabilité un des trois chemins partant de E pour son prochain déplacement ;*
- *soit avoir trouvé le bon chemin qui mène au fromage F et dans ce cas elle ne se déplace plus et reste au même endroit pour manger le fromage.*

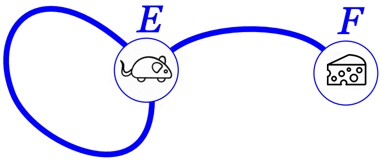

Figure 1

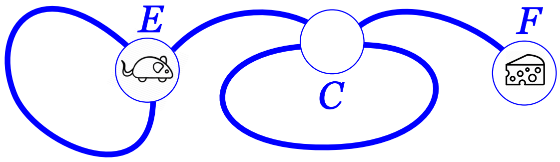

Figure 2

On note $n \in \mathbb{N}$ le nombre de déplacements de la souris, E_n l'événement que la souris se situe à l'entrée E après le n-ième déplacement, F_n l'événement que la souris soit en train de manger le fromage F après le n-ième déplacement et f_n la probabilité de l'événement F_n. Ainsi $\mathrm{f}_0 = 0$ et $\mathrm{f}_1 = \frac{1}{3}$.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{E_n}(F_{n+1})$ et $P_{F_n}(F_{n+1})$.*

   ▶ D'après l'énoncé, lorsque la souris est située à l'entrée E, elle choisit aléatoirement et avec la même probabilité un des trois chemins partant de E. La probabilité conditionnelle P_{E_n} sachant que la souris est située à l'entrée E après le n-ième déplacement est donc une probabilité uniforme. Puisqu'un seul des trois chemins partant de E mène à F, on en déduit que :

   $$\boxed{P_{E_n}(F_{n+1}) = \frac{1}{3}}.$$

   De plus, lorsque la souris est en train de manger le fromage F, elle ne se déplace plus. En particulier, sachant que la souris est en train de manger le fromage après le n-ième déplacement, il est certain qu'elle est toujours en train de manger le fromage après le $(n+1)$-ième déplacement. Donc :

   $$\boxed{P_{F_n}(F_{n+1}) = 1}.$$

2. *Montrer que $\mathrm{f}_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{f}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   ▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la souris est située à l'entrée E ou bien en train de manger le fromage après le n-ième déplacement, les événements E_n et F_n forment un système complet d'événements. On en déduit d'après la formule des probabilités totales que :

   $$\mathrm{f}_{n+1} = P(F_{n+1}) = P(E_n)P_{E_n}(F_{n+1}) + P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}).$$

   N'oubliez pas de préciser quel système complet d'événements vous utilisez pour appliquer la formule des probabilités totales, ni de justifier rapidement qu'il s'agit bien d'un système complet d'événements.

Or E_n est l'événement complémentaire de F_n donc $P(E_n) = 1 - P(F_n) = 1 - \mathrm{f}_n$. On obtient donc d'après les résultats de la question précédente :

$$\mathrm{f}_{n+1} = P(E_n)P_{E_n}(F_{n+1}) + P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}) = (1-\mathrm{f}_n) \times \frac{1}{3} + \mathrm{f}_n \times 1 = \boxed{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{f}_n}.$$

Et ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. *En déduire l'expression de f_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, $(\mathrm{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\alpha = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha \iff \left(1 - \frac{2}{3}\right)\alpha = \frac{1}{3} \iff \alpha = 1.$$

Alors la suite $(u_n = \mathrm{f}_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique car :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (\mathrm{f}_{n+1} - \alpha) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{f}_n\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha\right) = \frac{2}{3}(\mathrm{f}_n - \alpha) = \frac{2}{3}u_n.$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0\left(\frac{2}{3}\right)^n = (\mathrm{f}_0 - \alpha)\left(\frac{2}{3}\right)^n = (0-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

et par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{f}_n = u_n + \alpha = \boxed{-\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}.$$

4. *Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{f}_n$ et interpréter le résultat.*

▶ D'après le résultat de la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{f}_n = \lim_{n\to+\infty} -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 = 0 + 1 = \boxed{1} \quad \text{car } \tfrac{2}{3} \in]0,1[.$$

Ainsi, $\boxed{\text{après un très grand nombre de déplacement, il est presque certain que la souris soit en train de manger le fromage}}$. Ce qui est cohérent avec le labyrinthe de la figure 1.

À l'instant initial, on place désormais la souris à l'entrée E d'un second labyrinthe (voir la figure 2) qui contient, en plus du fromage F, un croisement C. Lorsque la souris arrive après un déplacement au croisement C, elle choisit aléatoirement et avec la même probabilité un des quatre chemins partant de C pour son prochain déplacement. De plus, on note C_n l'événement que la souris se situe au croisement C après le n-ième déplacement et c_n la probabilité de l'événement C_n. Ainsi $c_0 = \mathrm{f}_0 = 0$, $c_1 = \frac{1}{3}$ et $\mathrm{f}_1 = 0$.

5. *Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer $P_{E_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(C_{n+1})$, $P_{F_n}(C_{n+1})$, $P_{E_n}(F_{n+1})$, $P_{C_n}(F_{n+1})$ et $P_{F_n}(F_{n+1})$.*

▶ D'après l'énoncé, les probabilités conditionnelles P_{E_n} et P_{C_n} sont des probabilités uniformes. On en déduit que :

$\boxed{P_{E_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}}$ car un seul des trois chemins partant de E mène à C,

$\boxed{P_{E_n}(F_{n+1}) = \frac{0}{3} = 0}$ car aucun des trois chemins partant de E mène à F,

$\boxed{P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$ car exactement deux des quatre chemins partant de C reviennent à C,

$\boxed{P_{C_n}(F_{n+1}) = \frac{1}{4}}$ car un seul des quatre chemins partant de C mène à F.

De plus, sachant que la souris est en train de manger le fromage F après le n-ième déplacement, il est certain qu'elle est toujours en train de manger le fromage après le $(n+1)$-ième déplacement, en particulier il est impossible qu'elle soit située au croisement C après le $(n+1)$-ième déplacement. Donc :

$$\boxed{P_{F_n}(F_{n+1}) = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{P_{F_n}(C_{n+1}) = 0}.$$

6. *Montrer que $c_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}c_n - \frac{1}{3}\mathrm{f}_n$ et $\mathrm{f}_{n+1} = \frac{1}{4}c_n + \mathrm{f}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

► Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la souris est située à l'entrée E ou bien au croisement C ou bien en train de manger le fromage après le n-ième déplacement, les événements E_n, C_n et F_n forment un système complet d'événements. On en déduit d'après la formule des probabilités totales que :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(C_{n+1}) = P(E_n)P_{E_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) + P(F_n)P_{F_n}(C_{n+1}) \\ \text{et} \quad \mathrm{f}_{n+1} &= P(F_{n+1}) = P(E_n)P_{E_n}(F_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(F_{n+1}) + P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}). \end{aligned}$$

Puisque E_n, C_n et F_n forment un système complet d'événements, on a :

$$1 = P(E_n) + P(C_n) + P(F_n) \quad \text{donc} \quad P(E_n) = 1 - P(C_n) - P(F_n) = 1 - c_n - \mathrm{f}_n.$$

On obtient donc d'après les résultats de la question précédente :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(E_n)P_{E_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) + P(F_n)P_{F_n}(C_{n+1}) \\ &= (1 - c_n - \mathrm{f}_n) \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{2} + \mathrm{f}_n \times 0 \\ &= \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}c_n - \frac{1}{3}\mathrm{f}_n} \\ \text{et} \quad \mathrm{f}_{n+1} &= P(E_n)P_{E_n}(F_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(F_{n+1}) + P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}) \\ &= (1 - c_n - \mathrm{f}_n) \times 0 + c_n \times \frac{1}{4} + \mathrm{f}_n \times 1 \\ &= \boxed{\frac{1}{4}c_n + \mathrm{f}_n}. \end{aligned}$$

Et ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. *Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{f}_{n+2} = a\mathrm{f}_{n+1} + b\mathrm{f}_n + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

► Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'après les résultats de la question précédente :

$$\mathrm{f}_{n+2} = \frac{1}{4}c_{n+1} + \mathrm{f}_{n+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}c_n - \frac{1}{3}\mathrm{f}_n\right) + \left(\frac{1}{4}c_n + \mathrm{f}_n\right) = \frac{1}{12} + \frac{7}{24}c_n + \frac{11}{12}\mathrm{f}_n.$$

On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\frac{1}{12} + \frac{7}{24}c_n + \frac{11}{12}\mathrm{f}_n = \mathrm{f}_{n+2} = a\mathrm{f}_{n+1} + b\mathrm{f}_n + c = a\left(\frac{1}{4}c_n + \mathrm{f}_n\right) + b\mathrm{f}_n + c = c + \frac{a}{4}c_n + (a+b)\mathrm{f}_n.$$

Il suffit donc de poser $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\boxed{c = \frac{1}{12}}, \quad \frac{a}{4} = \frac{7}{24} \text{ donc } \boxed{a = \frac{7}{6}} \quad \text{et} \quad a + b = \frac{11}{12} \text{ donc } \boxed{b = \frac{11}{12} - \frac{7}{6} = -\frac{1}{4}}.$$

Attention à votre raisonnement ici : il ne s'agit pas d'une identification (comme pour les nombres complexes ou les polynômes). Vous n'avez pas besoin de raisonner par équivalences : il suffit de trouver un triplet (a, b, c) qui vérifie l'énoncé. Il est plus difficile (et ce n'est pas demandé) de montrer que les valeurs trouvées sont nécessaires, c'est-à-dire qu'il n'en existe pas d'autres.

8. *Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ afin que la suite $(u_n = \mathrm{f}_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit récurrente linéaire d'ordre 2.*

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} u_{n+2} = \mathrm{f}_{n+2} - \alpha = a\mathrm{f}_{n+1} + b\mathrm{f}_n + c - \alpha &= \frac{7}{6}(u_{n+1} + \alpha) - \frac{1}{4}(u_n + \alpha) + \frac{1}{12} - \alpha \\ &= \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{7}{6}\alpha - \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{12} - \alpha\right) = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12}\alpha\right). \end{aligned}$$

Si on pose $\boxed{\alpha = 1}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

9. *En déduire que $\mathrm{f}_n = 1 - \left(\frac{5\sqrt{13}+13}{26}\right)\left(\frac{7+\sqrt{13}}{12}\right)^n + \left(\frac{5\sqrt{13}-13}{26}\right)\left(\frac{7-\sqrt{13}}{12}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

▶ En reprenant les calculs de la question précédente, l'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

$$q^2 = \frac{7}{6}q - \frac{1}{4} \iff q^2 - \frac{7}{6}q + \frac{1}{4} = 0.$$

Elle admet pour discriminant $\Delta = (-\frac{7}{6})^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{13}{6^2} > 0$ et pour solutions :

$$q_1 = \frac{-\left(-\frac{7}{6}\right) + \sqrt{\frac{13}{6^2}}}{2 \times 1} = \frac{7+\sqrt{13}}{12} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{7-\sqrt{13}}{12}.$$

Par conséquent, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n.$$

Or $\mathrm{f}_0 = \mathrm{f}_1 = 0$ donc $u_0 = u_1 = 0 - \alpha = 0 - 1 = -1$ d'après le résultat de la question précédente. On en déduit que (λ_1, λ_2) est solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ -1 = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Or $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} = q_2 - q_1 \neq 0$ (car $q_1 \neq q_2$) donc ce système n'admet qu'une seule solution :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{q_2 - q_1} \begin{pmatrix} q_2 & -1 \\ -q_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{q_2 - q_1} \begin{pmatrix} -q_2 + 1 \\ q_1 - 1 \end{pmatrix}.$$

Profitez de tout ce qu'on a vu depuis le début de l'année pour gagner du temps dans vos calculs ! En particulier, pensez à la formule de l'inverse des matrices d'ordre 2 pour résoudre efficacement des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

On obtient donc :

$$\lambda_1 = \frac{-q_2 + 1}{q_2 - q_1} = \frac{-\frac{7-\sqrt{13}}{12} + 1}{\frac{7-\sqrt{13}}{12} - \frac{7+\sqrt{13}}{12}} = \frac{\frac{5+\sqrt{13}}{12}}{-2\frac{\sqrt{13}}{12}} = \frac{5+\sqrt{13}}{-2\sqrt{13}} = -\frac{5\sqrt{13}+13}{26}$$

$$\text{et} \quad \lambda_2 = \frac{q_1 - 1}{q_2 - q_1} = \frac{\frac{7+\sqrt{13}}{12} - 1}{\frac{7-\sqrt{13}}{12} - \frac{7+\sqrt{13}}{12}} = \frac{\frac{-5+\sqrt{13}}{12}}{-2\frac{\sqrt{13}}{12}} = \frac{-5+\sqrt{13}}{-2\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}-13}{26}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{f}_n &= u_n + \alpha = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n + 1 \\ &= \boxed{1 - \left(\frac{5\sqrt{13}+13}{26}\right)\left(\frac{7+\sqrt{13}}{12}\right)^n + \left(\frac{5\sqrt{13}-13}{26}\right)\left(\frac{7-\sqrt{13}}{12}\right)^n}. \end{aligned}$$

10. *Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{f}_n$ (en justifiant précisément chaque affirmation utilisée) et interpréter le résultat.*
▶ On a $9 < 13 < 16$ donc $3 < \sqrt{13} < 4$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante. Par conséquent :

$$0 < \frac{5}{6} = \frac{7+3}{12} < \frac{7+\sqrt{13}}{12} < \frac{7+4}{12} = \frac{11}{12} < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{4} = \frac{7-4}{12} < \frac{7-\sqrt{13}}{12} < \frac{7-3}{12} = \frac{1}{3} < 1.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{7+\sqrt{13}}{12}\right)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{7-\sqrt{13}}{12}\right)^n = 0$ et donc d'après le résultat de la question précédente :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{f}_n = 1}.$$

Ainsi, comme pour le premier labyrinthe, $\boxed{\text{après un très grand nombre de déplacement, il est presque certain que la souris soit en train de manger le fromage}}$. Ce qui est cohérent la figure 2.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients complexes. On définit :

- *la trace de A (notée $\mathrm{tr}(A)$) par la quantité $a + d$.*
- *Le déterminant de A (noté $\det(A)$) par la quantité $ad - bc$.*
- *Le polynôme caractéristique de A (noté $P_A(X)$) par $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$.*

On note $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par définition, $P_A(A)$ est la matrice $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2$.

1. (a) *Montrer que $P_A(A) = 0_2$.*
   (b) *On suppose que $\det(A) \neq 0$. À l'aide de la question 1a, retrouver la formule de A^{-1}.*

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose qu'il existe α et β des complexes différents tels que :

$$P_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta).$$

2. *Montrer que $\alpha + \beta = \mathrm{tr}(A)$, $\alpha\beta = \det(A)$.*
3. *En considérant la trace, montrer que $A \neq \alpha I_2$ et $A \neq \beta I_2$.*
4. *Montrer que $(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = 0_2$. En déduire que $A - \alpha I_2$ et $A - \beta I_2$ ne sont pas inversibles.*
5. *Montrer que $\alpha = a \Leftrightarrow \beta = d$.*

On suppose désormais que $\alpha \neq a$. On pose : $P = \begin{pmatrix} -b & d-\beta \\ a-\alpha & -c \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

6. *Montrer que les ensembles des solutions des systèmes*
$$\left\{\begin{array}{rcl} (a-\alpha)x + & by & = 0 \\ cx & + (d-\alpha)y & = 0 \end{array}\right. \quad (1) \text{ et } \quad \left\{\begin{array}{rcl} (a-\beta)x + & by & = 0 \\ cx & + (d-\beta)y & = 0 \end{array}\right. \quad (2)$$
sont respectivement $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-bt}{a-\alpha} \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{C} \right\}$ et $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{-ct}{d-\beta} \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{C} \right\}$
7. *Montrer que $AP = P\Delta$.*
8. *Montrer que $\det(P) = (\alpha - a)(\alpha - \beta)$ (indication : exprimer bc et d en fonction de a, α, β). En déduire que P est inversible et que $P^{-1}AP = \Delta$.*
9. *Déterminer une matrice Q inversible pour que l'on ait $Q^{-1}(A^T)Q = \Delta$ où A^T est la transposée de A.*

Exercice 3

Pour chaque $x > 0$ fixé, on considère l'équation suivante d'inconnue $y > 0$.

$$x \ln(x) = y \ln(y) \tag{E}$$

Le but de cet exercice est d'étudier les solutions de (E) en fonction des valeurs de $x > 0$.

1. *On considère la fonction $f : t \mapsto t\ln(t)$.*

(a) *Déterminer $\lim_{t\to 0} f(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f(t) &= \lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) \quad \text{en posant } t=\frac{1}{X} \iff X=\frac{1}{t}\\ &= \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln(X)}{X} = \boxed{0} \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées}\\ \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) &= \lim_{t\to+\infty} t\ln(t) = \boxed{+\infty} \quad \text{par produit de limites usuelles.}\end{aligned}$$

(b) *Dresser le tableau des variations de f et y faire figurer l'image de $t=1$.*

▶ La fonction f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions usuelles. On a :

$$\forall t>0,\ f'(t) = 1\times\ln(t) + t\times\frac{1}{t} = \ln(t)+1$$

donc :

$$f'(t)>0 \iff \ln(t)>-1 \iff t>\exp(-1)=\frac{1}{e}.$$

De plus, $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}\ln(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ et $f(1)=1\ln(1)=0$. D'où le tableau des variations de f :

t	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$f(t)$	$\Vert$ 0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. *On fixe $x>0$ pour cette question et on pose $g_x : y\mapsto f(y)-f(x)$.*

(a) *Dresser le tableau des variations de g_x et y faire figurer l'image de $y=1$.*

▶ Puisque x est fixé, $f(x)$ est une constante. On déduit donc le tableau des variations de la fonction $g_x = f - f(x)$ à partir de celui de la fonction f.

y	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$g_x(y)$	$\Vert$ $-f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}-f(x)$	$\nearrow$	$-f(x)$	$\nearrow$	$+\infty$

Utilisez les questions précédentes pour éviter de perdre du temps en calculs inutiles (comme le calcul de la dérivée de g_x et l'étude de son signe ici).

(b) *Démontrer chacun des points suivants.*

— *Si $x\in]0,\frac{1}{e}[$ alors (E) a deux solutions : x dans $]0,\frac{1}{e}[$ et une solution dans $]\frac{1}{e},1[$ notée $\varphi_1(x)$.*

— *Si $x=\frac{1}{e}$ alors (E) a une seule solution : $x=\frac{1}{e}$.*

— *Si $x\in]\frac{1}{e},1[$ alors (E) a deux solutions : une solution dans $]0,\frac{1}{e}[$ notée $\varphi_2(x)$ et x dans $]\frac{1}{e},1[$.*

— *Si $x\in[1,+\infty[$ alors (E) a une seule solution : x dans $[1,+\infty[$.*

▶ L'équation (E) est équivalente à l'équation $g_x(y)=0$ d'inconnue $y>0$ par définition de g_x. De plus, on remarque que $y=x$ est une solution évidente (car $f(x)=f(x)$). On raisonne par disjonction de cas.

1^er cas : $x\in]0,\frac{1}{e}[$. D'après le tableau des variations de f, on a $f(x)\in]-\frac{1}{e},0[$, donc :

$$-\frac{1}{e}-f(x)<0<-f(x).$$

D'après le tableau des variations de g_x et le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation (E) admet deux solutions : $\boxed{\text{la solution évidente } x \in]0, \frac{1}{e}[\text{ et une solution } \varphi_1(x) \in]\frac{1}{e}, 1[}$.

<u>2^e cas</u> : $x = \frac{1}{e}$. Alors $f(x) = -\frac{1}{e}$ et $-\frac{1}{e} - f(x) = 0$. D'après le tableau des variations de g_x et le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation (E) n'a qu'une solution : $\boxed{\text{la solution évidente } x = \frac{1}{e}}$.

<u>3^e cas</u> : $x \in]\frac{1}{e}, 1[$. D'après le tableau des variations de f, on a $f(x) \in] - \frac{1}{e}, 0[$, donc :

$$-\frac{1}{e} - f(x) < 0 < -f(x).$$

En raisonnant comme dans le 1^{er} cas, on en déduit que l'équation (E) admet deux solutions : $\boxed{\text{une solution } \varphi_2(x) \in]0, \frac{1}{e}[\text{ et la solution évidente } x \in]\frac{1}{e}, 1[}$.

<u>4^e cas</u> : $x \in [1, +\infty[$. D'après le tableau des varaitions de f, on a $f(x) \geqslant 0$, donc :

$$-\frac{1}{e} - f(x) < -f(x) \leqslant 0.$$

D'après le tableau des variations de g_x et le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation (E) n'a qu'une solution : $\boxed{\text{la solution évidente } x \in [1, +\infty[}$.

3. *On étudie l'application $\varphi_1 :]0, \frac{1}{e}[\to]\frac{1}{e}, 1[$ dans cette question.*

   (a) *Montrer que $f(\varphi_1(x)) > f(\varphi_1(x'))$ si $0 < x < x' < \frac{1}{e}$, puis en déduire que φ_1 est strictement décroissante.*

   ► Soit $(x, x') \in]0, \frac{1}{e}[^2$ tel que $x < x'$. Puisque $\varphi_1(x)$ est solution de l'équation (E) d'après le résultat de la question précédente, on a $g_x(\varphi_1(x)) = 0$, c'est-à-dire $f(\varphi_1(x)) = f(x)$. De même, on a $g_{x'}(\varphi_1(x')) = 0$, c'est-à-dire $f(\varphi_1(x')) = f(x')$. Or f est strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{e}[$, donc :

   $$f(\varphi_1(x)) = f(x) > f(x') = f(\varphi_1(x')) \quad \text{car } x < x'.$$

   On en déduit bien que $\boxed{f(\varphi_1(x)) > f(\varphi_1(x'))}$ pour tout $0 < x < x' < \frac{1}{e}$. De plus, on sait que $\varphi_1(x) \in]\frac{1}{e}, 1[$ et $\varphi_1(x') \in]\frac{1}{e}, 1[$ par définition de φ_1, et f est strictement croissante sur $]\frac{1}{e}, 1[$. Par conséquent, $\boxed{\varphi_1(x) > \varphi_1(x')}$ pour tout $0 < x < x' < \frac{1}{e}$ ce qui prouve que l'application $\boxed{\varphi_1 \text{ est strictement décroissante}}$.

   (b) *On fixe $x \in]0, \frac{1}{e}[$ pour cette question et on pose $\ell^- = \lim_{x' \to x^-} \varphi_1(x')$ et $\ell^+ = \lim_{x' \to x^+} \varphi_1(x')$.*

      i. *Quel résultat du cours permet de justifier que ℓ^- et ℓ^+ existent et sont finies ? Pour chacune de ces limites, donner les hypothèses précises qui permettent d'appliquer ce résultat.*

      ► On justifie que ℓ^- et ℓ^+ existent et sont finies d'après le $\boxed{\text{théorème de la limite monotone}}$. Plus précisément :

      — $\boxed{\varphi_1 \text{ est strictement décroissante et minorée par } \frac{1}{e} \text{ sur }]0, x[}$ donc $\ell^- = \lim_{x' \to x^-} \varphi_1(x')$ existe et est finie d'après le théorème de la limite monotone ;

      — $\boxed{\varphi_1 \text{ est strictement décroissante et majorée par 1 sur }]x, \frac{1}{e}[}$ donc $\ell^+ = \lim_{x' \to x^+} \varphi_1(x')$ existe et est finie d'après le théorème de la limite monotone.

      Soyez précis dans l'énoncé de vos hypothèses pour appliquer le théorème de la limite monotone !

      ii. *Montrer que ℓ^- et ℓ^+ appartiennent à $[\frac{1}{e}, 1]$.*

      ► On sait que $\varphi_1(x') \in]\frac{1}{e}, 1[$ pour tout $x' \in]0, \frac{1}{e}[$ par définition de φ_1, c'est-à-dire :

      $$\forall x' \in]0, \tfrac{1}{e}[, \quad \frac{1}{e} < \varphi_1(x') < 1$$

      ce qui donne en passant à la limite quand $x' \to x^-$ et quand $x' \to x^+$:

      $$\frac{1}{e} \leqslant \ell^- = \lim_{x' \to x^-} \varphi_1(x') \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{e} \leqslant \ell^+ = \lim_{x' \to x^+} \varphi_1(x') \leqslant 1.$$

N'oubliez pas de passer aux inégalités larges quand on passe à la limite dans des inégalités !

On obtient bien que $\boxed{\ell^- \in [\frac{1}{e}, 1]}$ et $\boxed{\ell^+ \in [\frac{1}{e}, 1]}$.

iii. *Montrer que $f(\ell^-) = f(x) = f(\ell^+)$, puis que $\ell^- = \varphi_1(x) = \ell^+$.*

▶ Soit $x' \in]0, \frac{1}{e}[$. Puisque $g_{x'}(\varphi_1(x')) = 0$ d'après ce qu'on a vu à la question 2(b), on a :

$$\forall x \in]0, \tfrac{1}{e}[, \quad f(\varphi_1(x')) = f(x')$$

ce qui donne en passant à la limite quand $x' \to x^-$ et quand $x' \to x^+$:

$$\lim_{x' \to x^-} f(\varphi_1(x')) = \lim_{x' \to x^-} f(x') \quad \text{et} \quad \lim_{x' \to x^+} f(\varphi_1(x')) = \lim_{x' \to x^+} f(x').$$

Or f est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions usuelles continues. En particulier f est continue en x donc :

$$\lim_{x' \to x^-} f(x') = \lim_{x' \to x^+} f(x') = f(x)$$

et f est continue en $\lim_{x' \to x^-} \varphi_1(x') = \ell^-$ car $\ell^- \geqslant \frac{1}{e} > 0$ d'après le résultat de la question précédente et en $\lim_{x' \to x^+} \varphi_1(x') = \ell^+$ (pour les mêmes raisons) donc :

$$\lim_{x' \to x^-} f(\varphi_1(x')) = f(\ell^-) \quad \text{et} \quad \lim_{x' \to x^+} f(\varphi_1(x')) = f(\ell^+).$$

N'oubliez pas de préciser que f est continue pour pouvoir passer à la limite ! Cet argument est nécessaire pour justifier ces calculs de limites.

Par conséquent :

$$\boxed{f(\ell^-) = f(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{f(\ell^+) = f(x)}.$$

En particulier, on en déduit que ℓ^- et ℓ^+ sont solutions de l'équation (E). Or $x \in]0, \frac{1}{e}[$ (par hypothèse), $\ell^- \in [\frac{1}{e}, 1]$ et $\ell^+ \in [\frac{1}{e}, 1]$ (d'après le résultat de la question 3(b)ii). D'après le résultat de la question 2(b), on en déduit que ℓ^- et ℓ^+ sont nécessairement égaux à la solution $\varphi_1(x)$ de (E), d'où :

$$\boxed{\ell^- = \ell^+ = \varphi_1(x)}.$$

iv. *En déduire que φ_1 est continue sur $]0, \frac{1}{e}[$.*

▶ La fonction φ_1 est continue en x si et seulement si $\lim_{x' \to x} \varphi_1(x') = \varphi_1(x)$.

Sautez sur l'occasion pour montrer que vous connaissez votre cours !

Or on a montré à la question précédente que :

$$\lim_{x' \to x^-} \varphi_1(x') = \ell^- = \varphi_1(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x' \to x^+} \varphi_1(x') = \ell^+ = \varphi_1(x).$$

On en déduit bien que $\lim_{x' \to x} \varphi_1(x') = \varphi_1(x)$ et donc que φ_1 est continue en x. Puisque ceci est vrai pour tout $x \in]0, \frac{1}{e}[$, on obtient que $\boxed{\varphi_1 \text{ est continue sur }]0, \frac{1}{e}[}$.

(c) *Justifier que φ_1 admet des limites finies en 0 et en $\frac{1}{e}$, puis déterminer ces limites.*

▶ φ_1 est strictement décroissante et majorée par 1 sur $]0, \frac{1}{e}[$. Donc $\lim_{x \to 0} \varphi_1(x)$ existe et est finie d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ_0 cette limite. Soit $x \in]0, \frac{1}{e}[$. Puisque $g_x(\varphi_1(x)) = 0$ d'après ce qu'on a vu à la question 2(b), on a :

$$\forall x \in]0, \tfrac{1}{e}[, \quad f(\varphi_1(x)) = f(x)$$

ce qui donne en passant à la limite quand $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(\varphi_1(x)) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \text{d'après le résultat de la question 1(a).}$$

Or $\ell_0 = \lim_{x\to 0} \varphi_1(x) \in [\frac{1}{e}, 1]$ en raisonnant comme à la question 3(b)ii, donc f est continue en $\ell_0 > 0$ ce qui donne :

$$0 = \lim_{x\to 0} f(\varphi_1(x)) = f(\ell_0).$$

Or, d'après le tableau des variations de f de la question 1(b), 1 est le seul antécédent de 0 par la fonction f. On en déduit que $\ell_0 = 1$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \varphi_1(x) = 1}.$$

De même, φ_1 est strictement décroissante et minorée par $\frac{1}{e}$ sur $]0, \frac{1}{e}[$ donc $\ell_{1/e} = \lim_{x\to 1/e} \varphi_1(x)$ existe et est finie d'après le théorème de la limite monotone. En raisonnant de même, on obtient que :

$$f(\ell_{1/e}) = \lim_{x\to 1/e} f(\varphi_1(x)) = \lim_{x\to 1/e} f(x) = -\frac{1}{e}.$$

Or, d'après le tableau des variations de f de la question 1(b), $\frac{1}{e}$ est le seul antécédent de $-\frac{1}{e}$ par la fonction f. On en déduit que $\ell_{1/e} = \frac{1}{e}$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\lim_{x\to 1/e} \varphi_1(x) = \frac{1}{e}}.$$

4. *On étudie l'application $\varphi_2 :]\frac{1}{e}, 1[\to]0, \frac{1}{e}[$ dans cette question.*

(a) *Montrer que $f(\varphi_2(\varphi_1(x))) = f(x)$ si $x \in]0, \frac{1}{e}[$ et que $f(\varphi_1(\varphi_2(x))) = f(x)$ si $x \in]\frac{1}{e}, 1[$.*

► Soit $x \in]0, \frac{1}{e}[$. Alors $\varphi_1(x) \in]\frac{1}{e}, 1[$ par définition de φ_1. Puisque $g_{\varphi_1(x)}(\varphi_2(\varphi_1(x))) = 0$ d'après ce qu'on a vu à la question 2(b), on a $f(\varphi_2(\varphi_1(x))) = f(\varphi_1(x))$. Or $g_x(\varphi_1(x)) = x$ d'après ce qu'on a vu à la question 2(b), donc $\boxed{f(\varphi_2(\varphi_1(x))) = f(\varphi_1(x)) = f(x)}$ pour tout $x \in]0, \frac{1}{e}[$.
De même, si $x \in]\frac{1}{e}, 1[$ alors $\varphi_2(x) \in]0, \frac{1}{e}[$ par définition de φ_2. On en déduit d'après ce qu'on a vu à la question 2(b) que $\boxed{f(\varphi_1(\varphi_2(x))) = f(\varphi_2(x)) = f(x)}$ pour tout $x \in]\frac{1}{e}, 1[$.

(b) *En déduire que φ_2 est la bijection réciproque de φ_1.*

► Soit $x \in]0, \frac{1}{e}[$. Puisque $f(\varphi_2(\varphi_1(x))) = f(x)$ d'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $\varphi_2(\varphi_1(x))$ est une solution de (E). Or $\varphi_2(\varphi_1(x)) \in]0, \frac{1}{e}[$ par définition de φ_1 et φ_2, donc $\varphi_2(\varphi_1(x))$ est égal à la solution évidente $x \in]0, \frac{1}{e}[$ d'après le résultat de la question 2(b). Puisque ceci est vrai pour tout $x \in]0, \frac{1}{e}[$, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi_2 \circ \varphi_1 = \mathrm{Id}_{]0, \frac{1}{e}[}}.$$

De même, si $x \in]\frac{1}{e}, 1[$ alors $\varphi_1(\varphi_2(x))$ est une solution de (E) d'après le résultat de la question précédente et $\varphi_1(\varphi_2(x)) \in]\frac{1}{e}, 1[$ par définition de φ_1 et φ_2, donc $\varphi_1(\varphi_2(x))$ est égal à la solution évidente $x \in]\frac{1}{e}, 1[$ d'après le résultat de la question 2(b). Puisque ceci est vrai pour tout $x \in]\frac{1}{e}, 1[$, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi_1 \circ \varphi_2 = \mathrm{Id}_{]\frac{1}{e}, 1[}}.$$

Finalement, on a obtenu que $\varphi_2 :]\frac{1}{e}, 1[\to]0, \frac{1}{e}[$ est l'application inverse de $\varphi_1 :]0, \frac{1}{e}[\to]\frac{1}{e}, 1[$, c'est-à-dire que $\boxed{\varphi_2 \text{ est la bijection réciproque de } \varphi_1}$.

(c) *À l'aide des résultats de la question 3, justifier que φ_2 est continue et dresser son tableau des variations.*

► La fonction φ_1 est strictement décroissante (d'après le résultat de la question 3(a)) et continue sur l'intervalle $]0, \frac{1}{e}[$ (d'après le résultat de la question 3(b)). D'après le théorème de la bijection continue, on en déduit que la bijection réciproque de φ_1 est continue. Or $\varphi_2 = (\varphi_1)^{-1}$ d'après le résultat de la question précédente, donc $\boxed{\varphi_2 \text{ est continue}}$.
D'autre part, d'après les résultats des questions 3(a) et 3(c), on obtient le tableau des variations de φ_1 :

x	0		$\frac{1}{e}$
$\varphi_1(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{e}$

Or on sait que la courbe représentative de la bijection réciproque $\varphi_2 = (\varphi_1)^{-1}$ est symétrique de la courbe représentative de φ_1 par rapport à la première bissectrice. On en déduit le tableau des variations de φ_2 :

x	$\frac{1}{e}$		1
$\varphi_2(x)$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

5. *Discuter du prolongement par continuité sur $[0, 1]$ de la fonction suivante :*

$$\varphi :]0, 1[\backslash\{\tfrac{1}{e}\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \varphi_1(x) & si\ x \in]0, \frac{1}{e}[\\ \varphi_2(x) & si\ x \in]\frac{1}{e}, 1[\end{cases}.$$

► D'après les résultats de la question 3(c) et ceux de la question précédente, on a :

$$\lim_{x\to 0} \varphi_1(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1/e} \varphi_1(x) = \lim_{x\to 1/e} \varphi_2(x) = \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} \varphi_2(x) = 0.$$

Par définition de la fonction φ, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1/e^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 1/e^+} \varphi(x) = \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} \varphi(x) = 0.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la fonction } \varphi :]0, 1[\backslash\{\tfrac{1}{e}\} \to \mathbb{R} \text{ est prolongeable par continuité sur }]0, 1[}$ en posant :

$$\boxed{\varphi :]0, 1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \varphi_1(x) & \text{si } x \in]0, \frac{1}{e}[\\ \frac{1}{e} & \text{si } x = \frac{1}{e} \\ \varphi_2(x) & \text{si } x \in]\frac{1}{e}, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}}.$$

Devoir surveillé 4 d'informatique et devoir surveillé de mathématiques 6

BCPST 1 2016-2017

— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Informatique

1. On suppose que la fonction `randint` est importée. On rappelle qu'elle prend en argument deux entiers a et b et qu'elle permet de tirer un entier au hasard compris entre a et b. Par exemple, `randint(1,3)` renvoie un élément de $\{1, 2, 3\}$ pris au hasard. On rappelle également que `a%3` est le reste de la division euclidienne de a par 3. Par exemple, `5%3` a pour valeur 2.

   On considère le programme suivant :

   ```
   a=0
   while(a%2==0) :
       a=randint(0,10)
   ```

   Quelles sont les valeurs possibles de a lorsque l'on sort de la boucle ?

2. Si on dispose de deux suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est possible de déterminer un encadrement de la limite commune l à ϵ près. En effet, l étant comprise entre ces deux suites, il suffit de trouver un entier n tel que $|u_n - v_n| \leq \epsilon$. Si on représente les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement par des fonctions u et v, l'algorithme précédent peut s'écrire en pseudo-code de la manière suivante :

   ```
   approximation(u,v,epsilon) :
       On commence n à 0.
       tant que |u(n)-v(n)|>epsilon :
            on augmente n de 1.
       on retourne la liste [u(n),v(n)]
   ```

   Écrire une fonction en Python `approximation(u,v,epsilon)` effectuant ce qui est décrit dans le pseudo-code. On supposera que :
   — `epsilon` est un réel strictement positif.
   — `u` est une fonction telle que pour tout entier n, la valeur de `u(n)` est u_n.
   — `v` est une fonction telle que pour tout entier n, la valeur de `v(n)` est v_n.

3. On dit que B est le miroir d'une matrice A si la matrice B est obtenue en parcourant les lignes de A de droite à gauche. Par exemple, le miroir de $A = [[1, 3], [2, 18]]$ est $B = [[3, 1], [18, 2]]$.
   Écrire une fonction `miroir(A)` qui prend en argument une matrice A et qui retourne son miroir.

Correction

1. On reste dans la boucle tant que le nombre choisi est pair. Donc Les valeurs possibles sont les nombres impairs entre 0 et 10, c'est-à-dire $1, 3, 5, 7, 9$.
2.
   ```
   def approximation(u,v,epsilon) :
       n=0
       while (abs(u(n)-v(n)))>epsilon :
           n=n+1
       return [u(n),v(n)]
   ```

3.
```
def miroir(A) :
    if A==[] :
        return A
    else :
        nblignes=len(A)
        nbcolonnes=len(A[0])
        B=[]
        for i in range(nblignes) :
            B=B+[[A[i][j] for j in range(nbcolonnes-1,-1,-1)]]
        return B
```

Algèbre

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients complexes. On définit :

— la trace de A (notée $\mathrm{tr}(A)$) par la quantité $a+d$.

— Le déterminant de A (noté $\det(A)$) par la quantité $ad-bc$.

— Le polynôme caractéristique de A (noté $P_A(X)$) par $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$.

On note $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par définition, $P_A(A)$ est la matrice $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2$.

1. (a) Montrer que $P_A(A) = 0_2$.
   (b) On suppose que $\det(A) \neq 0$. À l'aide de la question 1a, retrouver la formule de A^{-1}.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose qu'il existe α et β des complexes différents tels que :

$$P_A(X) = (X-\alpha)(X-\beta).$$

2. Montrer que $\alpha + \beta = \mathrm{tr}(A)$, $\alpha\beta = \det(A)$.
3. En considérant la trace, montrer que $A \neq \alpha I_2$ et $A \neq \beta I_2$.
4. Montrer que $(A-\alpha I_2)(A-\beta I_2) = 0_2$. En déduire que $A-\alpha I_2$ et $A - \beta I_2$ ne sont pas inversibles.
5. Montrer que $\alpha = a \Leftrightarrow \beta = d$.

On suppose désormais que $\alpha \neq a$. On pose : $P = \begin{pmatrix} -b & d-\beta \\ a-\alpha & -c \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

6. Montrer que les ensembles des solutions des systèmes
$$\left\{\begin{array}{llll} (a-\alpha)x & +by & = & 0 \\ cx & +(d-\alpha)y & = & 0 \end{array}\right. \quad (1) \text{ et } \quad \left\{\begin{array}{llll} (a-\beta)x & +by & = & 0 \\ cx & +(d-\beta)y & = & 0 \end{array}\right. \quad (2)$$
sont respectivement $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-bt}{a-\alpha} \\ t \end{pmatrix} t \in \mathbb{C} \right\}$ et $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{-ct}{d-\beta} \end{pmatrix} t \in \mathbb{C} \right\}$
7. Montrer que $AP = P\Delta$.
8. Montrer que $\det(P) = (\alpha - a)(\alpha - \beta)$ (indication : exprimer bc et d en fonction de a, α, β).
   En déduire que P est inversible et que $P^{-1}AP = \Delta$.
9. Déterminer une matrice Q inversible pour que l'on ait $Q^{-1}(A^T)Q = \Delta$ où A^T est la transposée de A.

Correction

1. (a) Calcul de A^2 :
$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$$
Par linéarité de la somme de matrices, on en déduit que
$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc-(a+d)a+(ad-bc) & ab+bd-(a+d)b \\ ca+dc-(a+d)c & cb+d^2-(a+d)d+(ad-bc) \end{pmatrix}$$
En développant les différents termes, on obtient
$$P_A(A) = \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2+da+ad-bc & ab+bd-ab-db \\ ca+dc-ac-dc & cb+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix}$$

Après simplification, on a

$$\boxed{P_A(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(b) On a

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2.$$

Donc

$$\det(A)I_2 = \operatorname{tr}(A)A - A^2.$$

Or $\det(A) \neq 0$. Donc

$$I_2 = \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{tr}(A)A - A^2)$$

Donc

$$I_2 = (\frac{1}{\det(A)}(\operatorname{tr}(A)I_2 - A))A = A(\frac{1}{\det(A)}(\operatorname{tr}(A)I_2 - A)).$$

A est donc inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{tr}(A)I_2 - A)$$

D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a+d-a & -b \\ -c & a+d-d \end{pmatrix}$$

On a bien

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. On a

$$P_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta).$$

En développant, on en déduit que

$$P_A(X) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta.$$

Par définition de P_A, on a donc

$$X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta.$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme sous la forme $\sum a_k X^k$, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{tr}(A) = \alpha + \beta, \det(A) = \alpha\beta}.$$

3. On a $\operatorname{tr}(A) = \alpha + \beta$ et $\operatorname{tr}(\alpha I_2) = 2\alpha$. Or $\alpha \neq \beta$. Donc $\alpha + \beta \neq 2\alpha$. Donc $\operatorname{tr}(A) \neq \operatorname{tr}(\alpha I_2)$. La trace étant une application sur les matrices, il en résulte que $A \neq I_2$. De même, on a $\operatorname{tr}(\beta I_2) = 2\beta$. Comme $\alpha \neq \beta$, on a $\operatorname{tr}(A) \neq \operatorname{tr}(\beta I_2)$. Par conséquent, les matrices A et βI_2 sont différentes.
4. En développant, on a

$$(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = A^2 - \beta A - \alpha A + \alpha\beta I_2 = P_A(A) = 0_2$$

d'après la question 1.a. Donc

$$\boxed{(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = 0_2}.$$

5. Si $(A - \alpha I_2)$ était inversible, en multipliant à gauche l'égalité $(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = 0_2$ par cet inverse, on en déduirait que $A - \beta I_2 = 0_2$, ce qui contredirait la question 3. Par conséquent $A - \alpha I_2$ est nécessairement non inversible. De même, si $(A - \beta I_2)$ était inversible, en multipliant à droite l'égalité $(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = 0_2$ par $(A - \beta I_2)^{-1}$, on en déduirait que $A - \alpha I_2 = 0_2$, ce qui contredirait la question 3. Donc $A - \beta I_2$ n'est pas inversible.
6. Supposons que $a = \alpha$ Comme on a $a + d = \alpha + \beta$, il en résulte que $d = \beta$. Réciproquement, supposons que $d = \beta$. En simplifiant dans la même égalité, on en déduit que $a = \alpha$. On a bien

$$a = \alpha \Leftrightarrow d = \beta.$$

7. Comme $a-\alpha \neq 0$, en appliquant $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{c}{a-\alpha}L_1$, à (1), le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lllll} (a-\alpha)x & +by & = & 0 \\ & \left((d-\alpha)-\frac{bc}{a-\alpha}\right)y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} (a-\alpha)x & +by & = & 0 \\ & ((d-\alpha)(a-\alpha)-bc)\,y & = & 0 \end{array}\right.$$

Or $(d-\alpha)(a-\alpha)-bc = ad-bc-(a+d)\alpha+\alpha^2 = P_A(\alpha)=0$. Donc le système (1) est équivalent à

$$(a-\alpha)x+by=0.$$

En mettant y en paramètre, on en déduit que

$$\boxed{S_1 = \left\{\begin{pmatrix} \frac{-bt}{a-\alpha} \\ t \end{pmatrix} t \in \mathbb{C}\right\}}$$

Comme $a \neq \alpha$, on a aussi $d \neq \beta$, d'après la question 5. En appliquant $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{b}{d-\beta}L_2$ au système (2), on en déduit que le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{llll} \left((a-\beta)-\frac{cb}{d-\beta}\right)x & & = & 0 \\ cx & +(d-\beta)y & = & 0 \end{array}\right.$$

En multipliant par $(d-\beta)$ la première ligne, on a comme système équivalent

$$\left\{\begin{array}{llll} ((a-\beta)(d-\beta)-cb)\,x & & = & 0 \\ cx & +(d-\beta)y & = & 0 \end{array}\right.$$

Or $(a-\beta)(d-\beta)-bc = ad-bc-(a+d)\beta+\beta^2 = P_A(\beta)=0$. Donc le système est équivalent à

$$cx+(d-\beta)y=0$$

En mettant x en paramètre, on en déduit que

$$\boxed{S_2 = \left\{\begin{pmatrix} t \\ \frac{-ct}{d-\beta} \end{pmatrix} t \in \mathbb{C}\right\}}.$$

8. Calculons AP et $P\Delta$:

$$AP = \begin{array}{ll} -\alpha b & ad-a\beta-bc \\ -bc+da-\alpha d & -\beta c \end{array}, P\Delta = \begin{array}{ll} -\alpha b & (d-\beta)\beta \\ (a-\alpha)\alpha & -\beta c \end{array}$$

Les coefficients diagonaux étant clairement égaux, il reste à montrer que

$$-bc+da-\alpha d = (a-\alpha)\alpha, ad-bc-a\beta = (d-\beta)\beta.$$

Or $ad-bc=\alpha\beta$. Donc $-bc+da-\alpha d = \alpha\beta-\alpha d = (\beta-d)\alpha$. De plus $\alpha+\beta=a+d$. Donc $\beta-d=a-\alpha$. D'où $\boxed{-bc+da-\alpha\beta=(a-\alpha)\alpha}$.

De même, en utilisant les précédentes égalités, $ad-bc-a\beta = \alpha\beta-a\beta = (\alpha-a)\beta = (d-\beta)\beta$. D'où $\boxed{ad-bc-a\beta=(d-\beta)\beta)}$.

Par conséquent, $\boxed{AP=P\Delta}$. On a

$$\begin{array}{lll} \det(P) & = & bc-(a-\alpha)(d-\beta) \\ & = & bc-ad+a\beta+\alpha d-\alpha\beta \\ & = & -\alpha\beta+a\beta+\alpha(\alpha+\beta-a)-\alpha\beta \quad (ad-bc=\alpha\beta, d=\alpha+\beta-a) \\ & = & \alpha^2+a\beta-\alpha\beta-a\alpha \\ & = & (\alpha-a)(\alpha-\beta) \end{array}$$

Or $\alpha \neq a$ et $\alpha \neq \beta$, donc ce déterminant est non nul. Par conséquent P est inversible. En multipliant à gauche l'égalité de la question 7 par P^{-1} on obtient alors

$$P^{-1}AP=\Delta.$$

9. On a $P^{-1}AP=\Delta$. En transposant, on obtient :

$$(P^{-1}AP)^T=\Delta^T.$$

Or Δ est diagonal. Donc $\Delta^T=\Delta$. Or pour des matrices M,N, on a $(MN)^T=N^TM^T$ D'où :

$$P^TA^T(P^{-1})^T=\Delta$$

Mais $(P^{-1})^T=(P^T)^{-1}$. Il suffit donc de poser $Q=(P^T)^{-1}$.