Devoir surveillé 7 mathématiques

BCPST 1 2016-2017

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. On suppose que n est un entier supérieur à 3 et p un réel compris entre 0 et 1. Soit X suivant une loi binomiale de paramètres n, p.

1. Calculer $E(X), E(X(X-1))$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{1, \cdots, n-1\}$, on a $E(X(X-1)\cdots(X-k+1)) = n(n-1)\cdots(n-k+1)p^k$.
3. Déterminer a_0, a_1, a_2, a_3 pour que l'on ait $X^3 = a_0 + a_1X + a_2X(X-1) + a_3X(X-1)(X-2)$. En déduire $E(X^3)$. Écrire le résultat sous la forme $\sum b_k n^k$.

Exercice 2. Soit n un entier tel que $n \geqslant 9$. Une urne contient n boules dont 4 sont rouges et $n-4$ sont noires.

1. On pioche 3 boules sans remise et l'on note X le nombre de boules rouges obtenues. Donner la loi de X.
2. On pioche 5 boules sans remise et l'on note X le nombre de boules rouges obtenues. Donner la loi de X.

Exercice 3. On admet que l'ensemble des matrices carrées réelles $M_n(\mathbb{R})$ forme un espace vectoriel. Une base est donnée par l'ensemble des matrice $(E_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ où pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$, E_{ij} est la matrice définie de la manière suivante :

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \forall l \in \{1, \cdots, n\} \quad \begin{array}{l} e_{kl} = 0 \quad \text{si } k \neq i \text{ ou } l \neq j \\ e_{ij} = 1 \end{array}$$

1. Quelle est la dimension de $M_n(\mathbb{R})$?
2. Dans cette question, on se place dans $M_2(\mathbb{R})$. Donner les $(E_{ij})_{1\leq i\leq 2, 1\leq j\leq 2}$ dans ce cas.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques (noté $S_n(\mathbb{R})$) est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
4. Donner une base de $S_3(\mathbb{R})$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la dimension de $S_n(\mathbb{R})$?

Exercice 4. On considère la fonction φ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star \quad \varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

1. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. On donne $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\dfrac{3}{2}; 2\right]\right) \subset \left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$.
3. En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right], \quad |\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.
4. Montrer l'équation $\varphi(x) = x$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^\star$.

   On note x_1 cette solution. A l'aide des données numériques de la question 2, montrer que $x_1 \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$.
5. Montrer successivement que pour tout entier n :

$$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2 \quad ; \quad |u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1| \quad ; \quad |u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

6. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. On considère la famille $\mathcal{F} = ((1,2,0,1),(1,0,-1,0),(1,0,1,1),(2,0,0,-1))$ de $\mathbb{R}^4$.

1. $\mathcal{F}$ est-elle libre ?
2. Déterminer une base de $vect(\mathcal{F})$.

Exercice 6. On considère la fonction définie sur $]-1;2[$ par $f(x) = \ln(-x^2+x+2)$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Justifier que f est C^2 sur $]-1;2[$.
2. Vérifier que $\forall x \in]-1;2[$, on a
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}.$$
3. Quelle est la monotonie de f' sur l'intervalle $]-1;2[$?
4. En déduire que $\forall x \in [0;1]$, on a
$$\frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$
5. Prouver que $\forall x \in [0;1]$, on a
$$|f(x) - \ln 2| \leq \frac{1}{2}x.$$
6. Déterminer la fonction affine représentée par la tangente de $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
7. En déduire que $\forall x \in]-1;2[$
$$f(x) \leq \ln 2 - \frac{1}{2}(x-1)$$