Devoir surveillé 7 mathématiques

BCPST 1 2016-2017

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. On suppose que n est un entier supérieur à 3 et p un réel compris entre 0 et 1. Soit X suivant une loi binomiale de paramètres n, p.

1. Calculer $E(X), E(X(X-1))$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{1, \cdots, n-1\}$, on a $E(X(X-1)\cdots(X-k+1)) = n(n-1)\cdots(n-k+1)p^k$.
3. Déterminer a_0, a_1, a_2, a_3 pour que l'on ait $X^3 = a_0 + a_1 X + a_2 X(X-1) + a_3 X(X-1)(X-2)$. En déduire $E(X^3)$. Écrire le résultat sous la forme $\sum b_k n^k$.

Correction

1. X suivant une loi binomiale de paramètres n, p, on a
$$E(X) = np.$$
On a
$$\begin{array}{rcl} E(X(X-1)) & = & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k(k-1) \\ & = & \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} k(k-1) p^k (1-p)^{n-k} \\ & = & \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ & = & n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-2-(k-2))!(k-2)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ & = & n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \end{array}$$
En effectuant le changement de variable $k' = k-2$, on obtient
$$E(X(X-1)) = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k'} p^{k'+2} (1-p)^{n-2-k'} = n(n-1)p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} \binom{n-2}{k'} p^{k'} (1-p)^{n-2-k'} = n(n-1)p^2.$$

2. Soit $k \in \{1, \cdots, n-1\}$. D'après le théorème de transfert, on a
$$\begin{array}{rcl} E(X(X-1)\cdots(X-n+k) & = & \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} i(i-1)\cdots(i-k+1) \\ & = & \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} i(i-1)\cdots(i-k+1) \\ & = & \sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} i(i-1)\cdots(i-k+1) \\ & = & \sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{(i-k)!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} \\ & = & \sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{(i-k)!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} \end{array}$$
En effectuant le changement de variable $i' = i-k$, on obtient
$$E(X(X-1)\cdots(X-n+k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)p^k \sum_{i'=0}^{n-k} \binom{n-k}{i'} p^{i'} (1-p)^{n-k-i'}$$
D'après la formule du binôme, on a donc
$$E(X(X-1)\cdots(X-n+k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)p^k (p+1-p)^{n-k} = n(n-1)\cdots(n-k+1)p^k.$$

3. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{array}{rcl} X^3 & = & a_0 + a_1 X + a_2 X(X-1) + a_3 X(X-1)(X-2) \\ \Leftrightarrow \quad X^3 & = & a_0 + (a_1 - a_2 + 2a_3)X + (a_2 - 3a_3)X^2 + a_3 X^3 \end{array}$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme sous la forme $\sum a_k X^k$, cette équation est équivalente au système

$$\begin{cases} a_0 & = & 0 \\ a_1 - a_2 + 2a_3 & = & 0 \\ a_2 - 3a_3 & = & 0 \\ a_3 & = & 1 \end{cases}$$

On obtient comme unique solution : $a_3 = 1, a_2 = 3, a_1 = 1, a_0 = 0$. On a donc

$$X^3 = X + 3X(X-1) + X(X-1)(X-2).$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$E(X^3) = E(X) + 3E(X(X-1)) + E(X(X-1)(X-2)).$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} E(X^3) & = & np + 3n(n-1)p^2 + n(n-1)(n-2)p^3 \\ & = & (p - 3p^2 + 2p^3)n + (3p^2 - 3p^3)n^2 + p^3 n^3 \end{array}$$

Exercice 2. Soit n un entier tel que $n \geqslant 9$. Une urne contient n boules dont 4 sont rouges et $n-4$ sont noires.

1. On pioche 3 boules sans remise et l'on note X le nombre de boules rouges obtenues. Donner la loi de X.
2. On pioche 5 boules sans remise et l'on note X le nombre de boules rouges obtenues. Donner la loi de X.

Correction

1. Cette expérience est une modélisation d'une loi hypergéométrique $H(n, 3, 4/n)$.
   Donc pour tout $k \in \{0, \cdots, 3\} P(X = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{n-4}{3-k}}{\binom{n}{3}}$
2. Cette expérience est une modélisation d'une loi hypergéométrique $H(n, 5, 4/n)$.
   Donc pour tout $k \in \{0, \cdots, 5\} P(X = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{n-4}{5-k}}{\binom{n}{5}}$

Exercice 3. On admet que l'ensemble des matrices carrées réelles $M_n(\mathbb{R})$ forme un espace vectoriel. Une base est donnée par l'ensemble des matrice $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ où pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$, E_{ij} est la matrice définie de la manière suivante :

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \forall l \in \{1, \cdots, n\} \quad \begin{array}{l} e_{kl} = 0 \quad \text{si } k \neq i \text{ ou } l \neq j \\ e_{ij} = 1 \end{array}$$

1. Quelle est la dimension de $M_n(\mathbb{R})$?
2. Dans cette question, on se place dans $M_2(\mathbb{R})$. Donner les $(E_{ij})_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2}$ dans ce cas.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques (noté $S_n(\mathbb{R})$) est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
4. Donner une base de $S_3(\mathbb{R})$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la dimension de $S_n(\mathbb{R})$?

Correction

1. D'après l'énoncé, une base de $M_n(\mathbb{R})$ est donnée par la famille $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Or cette famille comporte n^2 éléments. La dimension de cet espace est donc n^2.
2. Dans le cas de $M_2(\mathbb{R})$, les E_{ij} sont données par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On rappelle qu'une matrice symétrique est une matrice A vérifiant $A = A^T$. Montrons que $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
   — On a $0_n^T = 0_n$. Donc la matrice nulle est symétrique.
   — Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, A et B des matrices symétriques. On a
   $$(A + \lambda B)^T = A^T + \lambda B^T = A + \lambda B.$$
   par linéarité de la transposée et parce que A et B sont symétriques. Donc $A + \lambda B$ est bien symétrique.
   Donc $S_n(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
4. Montrons que la famille
   $$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
   est une base de $S_3(\mathbb{R})$.
   Chacune de ces matrices étant symétrique, on en déduit que $vect(\mathcal{F} \subset S_3(\mathbb{R})$. Montrons que $\mathcal{F}$ est génératrice.
   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ une matrice symétrique. On a
   $$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Donc la famille $\mathcal{F}$ est bien génératrice.
   Montrons que la famille $\mathcal{F}$ est libre. Soit a, b, c, d, e, f tels que
   $$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Autrement dit,
   $$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   D'où $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0, e = 0, f = 0$. Donc la famille $\mathcal{F}$ est bien libre. On a bien une base de $S_3(\mathbb{R})$.
5. Déterminons une base de $S_n(\mathbb{R})$. Pour tout $1 \leq i < j \leq n$, on pose
   $$S_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$$
   Montrons que la famille $\mathcal{G} = (E_{ii})_{1 \leq i \leq n}) \cup (S_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $S_n(\mathbb{R})$. Chacune de ces matrices étant symétriques, on a donc $vect(\mathcal{G}) \subset S_n(\mathbb{R})$. Montrons que $\mathcal{G}$ est une base de $S_n(\mathbb{R})$. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique de $S_n(\mathbb{R})$. On a
   $$A = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} E_{ij}.$$
   Or la matrice est symétrique, donc $a_{ij} = a_{ji}$. D'où
   $$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji}).$$
   D'où
   $$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} S_{ij}.$$
   Donc $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de $S_n(\mathbb{R})$. Montrons qu'elle est libre. Réciproquement, soit des coefficients $(a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ tels que
   $$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} S_{ij} = (0).$$

En posant $a_{ji} = a_{ij}$, où $i < j$, on a donc

$$(a_{ij}) = (0)$$

Tous les coefficients de cette matrice sont donc nuls. Donc la famille est libre. On a donc une base de $S_n(\mathbb{R})$. Reste à déterminer le nombre d'éléments de cette famille. Pour cela, on somme sur l'ensemble des indices.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Card}(\mathcal{G}) & = & (\sum_{i=1}^{n} 1) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 \\ & = & n + \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} 1 \\ & = & n + \sum_{j=2}^{n} (j-1) \\ & = & n + \sum_{j=1}^{n-1} j \\ & = & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ & = & \frac{n(n+1)}{2} \end{array}$$

On en déduit que la dimension de $S_n(\mathbb{R})$ est égale $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 4. On considère la fonction φ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star \quad \varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

1. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. On donne $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\dfrac{3}{2};2\right]\right) \subset \left[\dfrac{3}{2};2\right]$.
3. En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2};2\right], \quad |\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.
4. Montrer l'équation $\varphi(x) = x$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^\star$.

   On note x_1 cette solution. A l'aide des données numériques de la question 2, montrer que $x_1 \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$.
5. Montrer successivement que pour tout entier n :

$$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2 \quad ; \quad |u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1| \quad ; \quad |u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

6. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

1. La fonction φ étant combinaison linéaire de fonctions usuelles C^∞ sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit qu'elle est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Elle est en particulier dérivable. Calculons sa dérivée :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \varphi'(x) & = & -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \\ & = & \frac{x-2}{x^2} \end{array}$$

   Il en résulte que :
   — φ' est strictement négative sur $]0,2[$.
   — φ' est strictement positive sur $]2,+\infty[$.
   — φ' est nulle en 2.
   On a donc le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	0 ↘	$\varphi(\frac{3}{2})$ ↘	$\varphi(2)$ ↗	$+\infty$

2. D'après le tableau de variations, φ est décroissante sur $[\frac{3}{2},2]$. Donc pour tout $x \in [\frac{3}{2},2], 2 \geq \varphi(\frac{3}{2}) \geq \varphi(x) \geq \varphi(2) \geq \frac{3}{2}$ car $\varphi(\frac{3}{2}) \approx 1,73 \leq 2$ et $\varphi(2) \approx 1,69$. D'où $\varphi([\frac{3}{2},2]) \subset [\frac{3}{2},2]$.

3. φ étant C^∞, on peut dériver φ'. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \varphi"(x) \quad = \quad \tfrac{x^2-2x(x-2)}{x^4}$$
$$= \tfrac{x(x-2x+4)}{x^4}$$
$$= \tfrac{(-x+4)}{x^3}$$

On s'intéresse aux variations de φ' sur $[\frac{3}{2}, 2]$. On constate que $\varphi"$ est positive sur cet intervalle. Donc φ' est croissante sur $[\frac{3}{2}, 2]$. D'où

$$\forall x \in [\frac{3}{2}, 2], \varphi'(\frac{3}{2}) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(2).$$

Donc

$$\forall x \in [\frac{3}{2}, 2], \frac{-2}{9} \leq \varphi'(x) \leq 0.$$

En passant à la valeur absolue, on en déduit que

$$\forall x \in [\frac{3}{2}, 2], \frac{2}{9} \leq |\varphi'(x)|.$$

4. Étudions la fonction $g : x \mapsto x - \phi(x)$. g étant la différence de deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+\star}$. En particulier, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. On a donc

$$\forall x > 0, g'(x) = 1 - \phi'(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2}$$

Le discriminant du numérateur étant strictement négative, on en déduit que le numérateur est toujours strictement positif. Par conséquent, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Déterminons les limites en 0 et en $+\infty$. En 0, par croissances comparées, on a $\lim_{0^+} g = -\infty$. De même, par croissances comparées, on a $\lim_{+\infty} g = +\infty$.
En résumé :
— la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ car C^∞.
— g est strictement croissante sur cet intervalle.
— $\lim_{0^+} g = -\infty$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il en résulte qu'il existe un unique x_1 tel que $g(x_1) = 0$. Autrement dit, l'équation $\varphi(x) = x$ admet une unique solution. De plus, $g(\frac{3}{2}) \approx -0,23 < 0$ et $g(2) \approx 0,31 > 0$. En appliquant de nouveau le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $x_1 \in [\frac{3}{2}, 2]$.

5. Montrons par récurrence que $u_n \in [\frac{3}{2}, 2]$.
— Par hypothèse, $u_0 = \frac{3}{2}$. Donc $P(0)$ est vraie.
— Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain n. On a donc $u_n \in [\frac{3}{2}, 2]$. Or d'après la question 2, on a $\varphi([\frac{3}{2}, 2]) \subset [\frac{3}{2}, 2]$. Par conséquent, $u_{n+1} = \varphi(u_n) \in [\frac{3}{2}, 2]$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
— D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [\frac{3}{2}, 2]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Cas 1 : $u_n = x_1$. On a donc $\varphi(u_n) = \varphi(x_1)$. Or x_1 est point fixe de φ. Donc $u_{n+1} = x_1$. L'inégalité est bien vérifiée.
   (b) Cas 2 : $u_n \neq x_1$. On a :
   $$\frac{u_{n+1} - x_1}{u_n - x_1} = \frac{\varphi(u_n) - \varphi(x_1)}{u_n - x_1}$$
   Or ϕ est dérivable sur $]u_n, x_1[$ et continue sur $[u_n; x_1]$ car de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Donc il existe α_n dans cette intervalle tel que
   $$\varphi'(\alpha_n) = \frac{u_{n+1} - x_1}{u_n - x_1}.$$
   Or$[u_n; x_1] \subset [\frac{3}{2}, 2]$. Donc d'après la question 3, $|\varphi'(\alpha_n)| \leq \frac{2}{9}$. On a donc
   $$\left| \frac{u_{n+1} - x_1}{u_n - x_1} \right| \leq \frac{2}{9}.$$
   D'où
   $$|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|.$$
   Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - x_1| \leq (\frac{2}{9})^n$.

— Pour $n=0$: on a $\frac{3}{2} \leq x_1 \leq 2$. Donc $|u_1 - x_1| \leq \frac{1}{2} \leq 1$. Donc $P(0$ est vraie.

— On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain n. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a

$$|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}(\frac{2}{9})^n = (\frac{2}{9})^{n+1}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

— Conclusion : on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - x_1| \leq (\frac{2}{9})^n$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq |u_n - x_1| \leq (\frac{2}{9})^n$. Comme $\frac{2}{9} \in]-1,1[$, on en déduit que $\lim n \to +\infty (\frac{2}{9})^n = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} |u_n - x_1| = 0$. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_1$.

Exercice 5. On considère la famille $\mathcal{F} = ((1,2,0,1),(1,0,-1,0),(1,0,1,1),(2,0,0,-1))$ de $\mathbb{R}^4$.

1. $\mathcal{F}$ est-elle libre ?
2. Déterminer une base de $vect(\mathcal{F})$.

Correction

1. Déterminons le rang de la famille $\mathcal{F}$. Pour cela, considérons la matrice A où l'on a placé en colonnes les vecteurs de $\mathcal{F}$ et échelonnons cette matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Effectuons les opérations suivantes : $L_1 \leftrightarrow L_2, L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1, L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - L_1$. On obtient comme matrice équivalente :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant $L_4 \leftrightarrow L_3, L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$, on obtient comme matrice équivalent

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 4. La famille est donc de rang 4 et de taille 4. Il s'agit donc d'une famille libre.

2. Par définition, $vect(\mathcal{F})$ est engendré par $\mathcal{F}$. De plus, on a montré que cette famille est libre. Donc $\mathcal{F}$ est une base de $vect(\mathcal{F})$.

Exercice 6. On considère la fonction définie sur $]-1;2[$ par $f(x) = \ln(-x^2+x+2)$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Justifier que f est C^2 sur $]-1;2[$.
2. Vérifier que $\forall x \in]-1;2[$, on a
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}.$$
3. Quelle est la monotonie de f' sur l'intervalle $]-1;2[$?

4. En déduire que $\forall x \in [0;1]$, on a
$$\frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$
5. Prouver que $\forall x \in [0;1]$, on a
$$|f(x) - \ln 2| \leq \frac{1}{2}x.$$
6. Déterminer la fonction affine représentée par la tangente de $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
7. En déduire que $\forall x \in]-1;2[$
$$f(x) \leq \ln 2 - \frac{1}{2}(x-1)$$

Correction

1. La fonction $g : x \mapsto -x^2 + x + 2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ car polynomiale. Or $g(]-1,2[) \subset \mathbb{R}^{+\star}$ car on est entre les racines de g. La fonction ln étant C^2 sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Par composition, on en déduit que $f = \ln \circ g$ est C^2 sur $]-1,2[$.
2. Soit $x \in]-1,2[$. On a
$$f'(x) = \frac{-2x+1}{-x^2+x+2}.$$
D'un autre côté, on a
$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} &= \tfrac{x-2+x+1}{(x+1)(x-2)} \\ &= \tfrac{2x-1}{x^2-x-2} \\ &= \tfrac{-2x+1}{-x^2+x+2} \\ &= f'(x) \end{aligned}$$
3. En calculant f", on obtient
$$\forall x \in]-1,2[, f"(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2}.$$
Donc f" est strictement négative. Donc f' est strictement décroissante sur $]-1,2[$.
4. Pour tout $x \in [0,1]$, on a donc
$$f(1) \leq f'(x) \leq f(0).$$
D'où
$$\boxed{\frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}.}$$
5. Pour $x = 0$, l'inégalité est clairement vérifiée. Soit $x \in]0,1]$. la fonction f étant C^2 sur $]-1,2[$, elle est en particulier dérivable sur $]0,x[$ et continue sur $[0,x]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc $\alpha \in]0,x[$ tel que
$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(\alpha).$$
Or, d'après la question 4, on a $|f'(\alpha)| \leq \frac{1}{2}$. On en déduit que
$$\left|\frac{f(x) - \ln(2)}{x}\right| \leq \frac{1}{2}.$$
D'où
$$\left|\frac{f(x) - \ln(2)}{x}\right| \leq \frac{1}{2}x.(x \geq 0).$$
6. On se place en 1. Calculons la dérivée de f en 1. On a $f'(1) = -\frac{1}{2}$. La fonction affine représentée par la tangente est donc donnée par
$$\forall x \in]-1,2[, T(x) = \ln(2) - \frac{1}{2}(x-1).$$

7. Pour tout $x \in]-1,2[$, on pose $g(x) = T(x) - f(x)$. La fonction T étant affine, elle est donc C^2 sur $]-1,2[$. g est donc C^2 sur $]-1,2[$ par différence de deux fonctions C^2 sur $]-1,2[$. On a

$$\forall x \in]-1,2[, g'(x) = -\frac{1}{2} - f'(x).$$

On sait que f' est strictement décroissante. Donc $-f'$ est strictement croissante. Il en résulte que g' est strictement croissante sur $]-1,2[$. Or $g'(1) = 0$. On en déduit que g est décroissante sur $]-1,1]$ puis croissante sur $[1,2[$. Par conséquent, $g(1)$ est le minimum de g. Autrement dit

$$\forall x \in]-1,2[, g(x) \geq g(1).$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in]-1,2[, \ln(2) - \frac{1}{2}(x-1) \geq f(x)}.$$