Devoir surveillé 8 mathématiques

BCPST 1 2016-2017

— Durée : 45 minutes.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_p(x) = \frac{1}{(1+x^2)^p}$ et $I_p = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^p} dx$.

1. Écrire un programme permettant d'afficher la courbe de f_1 sur l'intervalle $[0,1]$. On considérera 100 points de l'intervalle.
2. Calculer I_0, I_1.
3. Écrire une fonction `sommeRiemmann(n,p)` qui retourne la valeur $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_p(\frac{k}{n})$. On supposera $n \geq 1$.
4. On fixe $n \geq 1$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \{0, \cdots, n-1\},\ \forall t \in [\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n}],\ \frac{1}{1+\left(\frac{(k+1)}{n}\right)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$.
   (b) En déduire que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k+1}{n})^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$.
   (c) En déduire une fonction `approx(ecart)` qui retourne une liste $[a,b]$ où $a \leq \frac{\pi}{4} \leq b$ et $|b-a| \leq$ `ecart`.
5. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, I_p = 2^{-p} + 2p(I_p - I_{p+1})$.
   En déduire que
   $$\forall p \geq 1, I_{p+1} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right) I_p + \frac{1}{p2^{p+1}}. \qquad \text{(R)}$$
   (b) En déduire une fonction `calculeI(p)` qui retourne la valeur de I_p pour $p \in \mathbb{N}$ en utilisant la relation de récurrence (R) et les valeurs de I_0, I_1. On supposera que le nombre π est donnée en Python par la variable `pi`.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$. En étudiant le signe de $f_p - f_{p+1}$, montrer que la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et en déduire sa nature.
7. On cherche à déterminer la limite de $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
   (a) Pour tout $p \geq 3$, justifier que l'on a $I_p = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}} f_p(x)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}}^1 f_p(x)dx$.
   (b) En déduire que pour tout $p \geq 3$, $0 \leq I_p \leq \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}} + \frac{1}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p}$.
   (c) En déduire la limite de $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
8. On suppose que la variable `pi` contient la valeur de π. On considère les fonctions suivantes :

```
def test1() :
    for i in range(1,60) :
        print(calculeI(i)*(i**0.5)*2/(pi**0.5))
def test2() :
    for i in range(1,60) :
        print(calculeI(i)*i)
def test3() :
    for i in range(1,60) :
        print(calculeI(i)/i)
```

Lorsque l'on exécute ces programmes on constate que l'on obtient les affichages suivants :

`test1()`	0.886...	1.025...	1.064...	1.071...	1.067...	1.061...	1.054...	...
`test2()`	0.785...	1.285...	1.633...	1.898...	2.115...	2.303...	2.472...	...
`test3()`	0.785...	0.321...	0.181...	0.118...	0.084...	0.063...	0.050...	...

Déduire de ces tests informatiques un équivalent possible pour I_p. On l'écrira sous la forme Cp^{α}.

DS n$^{\text{o}}$ 8 de mathématiques

durée : 2 heures et 30 minutes

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-la sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront des facteurs importants d'appréciation de la copie.

Exercice 1

Pour toute variable aléatoire X telle que l'ensemble de ses valeurs images $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, on définit sa fonction génératrice par :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right) \quad \text{où E désigne l'espérance.}$$

Soit X une telle variable aléatoire. On note $m \in \mathbb{N}$ sa valeur image maximale, ainsi $X(\Omega) \subset \{0, 1, 2, \ldots, m\}$.

1. Justifier que g_X est une fonction polynomiale.
2. (a) Calculer $g_X(1)$.
   (b) Montrer que $g'_X(1) = \mathrm{E}(X)$.
   (c) Montrer que $g''_X(1) = \mathrm{E}(X(X-1))$.
   (d) Exprimer $\mathrm{V}(X)$ (où V désigne la variance) en fonction de $g'_X(1)$ et $g''_X(1)$.
3. (a) Exprimer g_{X+1} à l'aide de g_X.
   (b) Exprimer g_{2X} à l'aide de g_X.
4. Dans cette question, on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ où $(n, p) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$.
   (a) Calculer g_X.
   (b) Retrouver les valeurs de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ à l'aide de la fonction génératrice.

Exercice 2

On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto x \exp(\sin^2(x)).$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.
2. Justifier que f réalise une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers un ensemble I à déterminer.
3. Justifier que la bijection réciproque f^{-1} de $f|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
4. Justifier l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_{x\to 0}(x^5)$.
5. En composant les développements limités de f^{-1} et f, déterminer les valeurs des constantes a, b et c.
6. Que peut-on en déduire pour la tangente de la courbe représentative de f^{-1} au voisinage de 0 ?

Exercice 3

On propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Pour cela, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1 - t^2}{2t}$ pour tout $t < 0$.

1. À l'aide du changement de variable $x = \varphi(t)$ dont on vérifiera précisément les hypothèses, montrer que
$$I = \frac{1}{4} \int_{-1}^{-(1+\sqrt{2})} \frac{(1 + t^2)^2}{t^3} \mathrm{d}t.$$
2. À l'aide d'un changement de variable à déterminer, montrer que
$$I = \frac{1}{4} \int_{1}^{1+\sqrt{2}} \frac{(1 + t^2)^2}{t^3} \mathrm{d}t.$$
3. Conclure.

Problème

Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. On note 0_p l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^p$ et I_p l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^p$. On rappelle que pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$, on définit par récurrence les endomorphismes suivants :

$$f^0 = \mathrm{I}_p \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f \circ f^k.$$

On dit qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^n = 0_p$. Dans ce cas, le plus petit entier $n \geqslant 1$ qui vérifie cette propriété est appelé l'indice de nilpotence de f.

A) Dans cette partie, on considère l'application suivante :

$$f : (x, y, z, t) \mapsto (3x + y - 2z - 2t, -x + t, 2x + y - 2z - t, x - t).$$

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

2. Calculer M^3. En déduire que f est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.
3. f est-il injectif ? surjectif ?
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f - \lambda \mathrm{I}_p$ est bijectif si et seulement si $\lambda \neq 0$.
5. (a) Déterminer une base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Trouver un antécédent $\overrightarrow{v_3}$ de $\overrightarrow{v_2}$ par f puis un antécédent $\overrightarrow{v_4}$ de $\overrightarrow{v_3}$ par f.
   (c) Justifier que la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (d) Déterminer la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$.
   (e) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.

B) Cette partie propose de démontrer quelques propriétés générales des endomorphismes nilpotents. On fixe donc f un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^p$ quelconque et on note n son indice de nilpotence.

1. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f^k \neq 0$ si $k < n$ et $f^k = 0_p$ si $k \geqslant n$.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f^{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) En déduire que f n'est pas injectif. f est-il surjectif ?
3. Le but de cette question est de démontrer que $n \leqslant p$.
   (a) Justifier que l'ensemble $\mathbb{R}^p \setminus \mathrm{Ker}(f^{n-1})$ est non vide.
   On fixe $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p \setminus \mathrm{Ker}(f^{n-1})$ et on suppose qu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ non tous nuls vérifiant
   $$\lambda_0 \overrightarrow{u} + \lambda_1 f(\overrightarrow{u}) + \lambda_2 f^2(\overrightarrow{u}) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}.$$
   On note m le plus petit des entiers $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tels que $\lambda_k \neq 0$.
   (b) En considérant le vecteur $f^{n-1-m}(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(\overrightarrow{u}))$, montrer que $\lambda_m = 0$.
   (c) Que peut-on en déduire pour la famille $(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}), f^2(\overrightarrow{u}), \dots, f^{n-1}(\overrightarrow{u}))$?
   (d) Conclure.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. On pose $g = \mathrm{I}_p + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}$.
   (a) Simplifier $(f - \mathrm{I}_p) \circ g$.
   (b) En déduire que $f - \mathrm{I}_p$ est bijectif et déterminer sa bijection réciproque en fonction de g.
   (c) Justifier que $\frac{1}{\lambda} f$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^p$ d'indice de nilpotence égal à n.
   (d) En déduire que $f - \lambda \mathrm{I}_p$ est bijectif et déterminer sa bijection réciproque en fonction de λ, f et n.