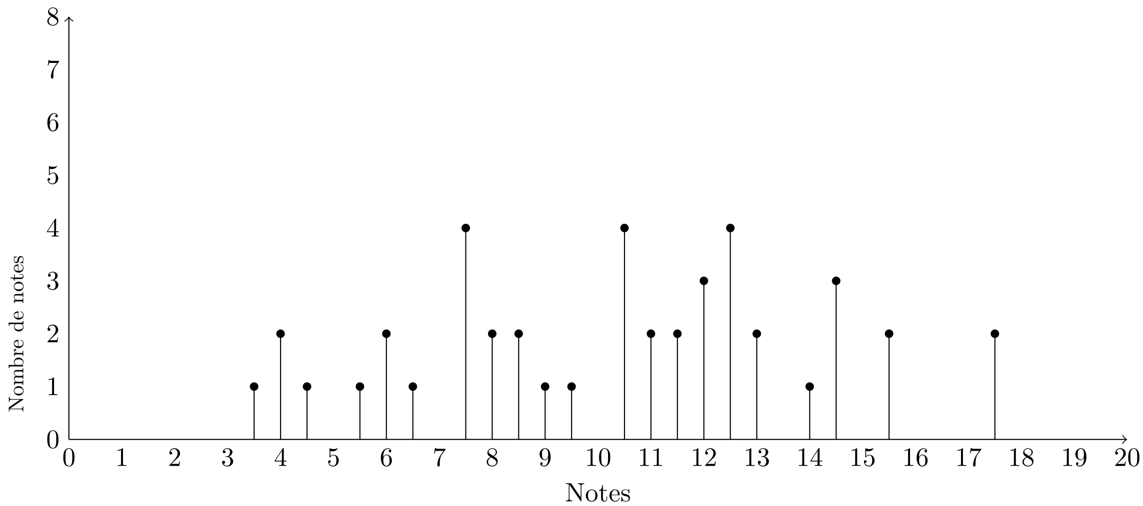
Devoir surveillé 8 mathématiques

BCPST 1 2016-2017

Diagramme



Corrigé du DS n° 8 de mathématiques

Exercice 1

Pour toute variable aléatoire X telle que l'ensemble de ses valeurs images $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, on définit sa fonction génératrice par :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right) \quad \text{où } \mathrm{E} \text{ désigne l'espérance.}$$

Soit X une telle variable aléatoire. On note $m \in \mathbb{N}$ sa valeur image maximale, ainsi $X(\Omega) \subset \{0, 1, 2, \ldots, m\}$.

1. *Justifier que g_X est une fonction polynomiale.*

► On a d'après le théorème de transfert :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{m} t^k \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \quad \text{en posant } a_k = \mathrm{P}(X = k).$$

Donc $\boxed{g \text{ est bien une fonction polynomiale associée au polynôme } \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]}$.

2. (a) *Calculer $g_X(1)$.*

► Par définition de g_X, on a $\boxed{g_X(1) = \mathrm{E}(1^X) = \mathrm{E}(1) = 1}$.

On peut également retrouver ce résultat à l'aide du théorème de transfert :

$$g_X(1) = \mathrm{E}\left(1^X\right) = \sum_{k=0}^{m} 1^k \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{m} (X = k)\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(X \in \bigcup_{k=0}^{m} \{k\}\right) = \mathrm{P}\left(X \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}\right) = 1.$$

(b) *Montrer que $g_X'(1) = \mathrm{E}(X)$.*

► La fonction génératrice g_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale d'après la question 1. On a d'après le théorème de transfert :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{m} t^k \mathrm{P}(X = k) \quad \text{donc :} \quad g_X' : t \mapsto \sum_{k=0}^{m} k t^{k-1} \mathrm{P}(X = k)$$

et en particulier :

$$g_X'(1) = \sum_{k=0}^{m} k 1^{k-1} \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{m} k \mathrm{P}(X = k) = \boxed{\mathrm{E}(X)}.$$

(c) *Montrer que $g_X''(1) = \mathrm{E}(X(X-1))$.*

► La fonction génératrice est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour les mêmes raisons que celles exposées à la question précédente, et on a :

$$g_X'' : t \mapsto \sum_{k=0}^{m} k(k-1) t^{k-2} \mathrm{P}(X = k)$$

donc en particulier :

$$g_X''(1) = \sum_{k=0}^{m} k(k-1) 1^{k-2} \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{m} k(k-1) \mathrm{P}(X = k) = \boxed{\mathrm{E}(X(X-1))}$$

d'après le théorème de transfert.

(d) *Exprimer $\mathrm{V}(X)$ (où V désigne la variance) en fonction de $g'_X(1)$ et $g''_X(1)$.*

▶ On a d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2.$$

Or on a par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(X(X-1)) = \mathrm{E}(X^2 - X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X).$$

On peut également justifier cette égalité en détaillant les calculs à l'aide du théorème de transfert et la linéarité de la somme.

D'où en utilisant les résultats des questions précédentes :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)^2 = \mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X)\Big(1 - \mathrm{E}(X)\Big)$$
$$= \boxed{g''_X(1) + g'_X(1)\Big(1 - g'_X(1)\Big)}.$$

3. (a) *Exprimer g_{X+1} à l'aide de g_X.*

▶ Par définition de la fonction génératrice, on a :

$$g_{X+1} : t \mapsto \mathrm{E}\Big(t^{X+1}\Big) = \mathrm{E}\Big(t^X \times t\Big) = \mathrm{E}\Big(t^X\Big) \times t = \boxed{tg_X(t)} \quad \text{par linéarité de l'espérance.}$$

On peut également retrouver ce résultat en détaillant les calculs à l'aide du théorème de transfert et la linéarité de la somme.

(b) *Exprimer g_{2X} à l'aide de g_X.*

▶ Par définition de la fonction génératrice, on a :

$$g_{2X} : t \mapsto \mathrm{E}\Big(t^{2X}\Big) = \mathrm{E}\Big(\left(t^2\right)^X\Big) = \boxed{g_X\left(t^2\right)}.$$

De même, on peut retrouver ce résultat en détaillant les calculs à l'aide du théorème de transfert.

4. *Dans cette question, on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ où $(n,p) \in \mathbb{N} \times [0,1]$.*

(a) *Calculer g_X.*

▶ On a par définition de la loi binomiale :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On en déduit d'après le théorème de transfert que :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\Big(t^X\Big) = \sum_{k=0}^{n} t^k \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k}.$$

Puis on a en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$g_X : t \mapsto \boxed{(pt + 1 - p)^n}.$$

(b) Retrouver les valeurs de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ à l'aide de la fonction génératrice.

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$g_X' : t \mapsto np(pt+1-p)^{n-1} \quad \text{et} \quad g_X'' : t \mapsto n(n-1)p^2(pt+1-p)^{n-2}.$$

On en déduit d'après les résultat de la question 2 que :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= g_X'(1) = np(p+1-p)^{n-1} = np(1)^{n-1} = \boxed{np}\\ \mathrm{V}(X) &= g_X''(1) + g_X'(1)\Big(1 - g_X'(1)\Big) = n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2} + np(1-np)\\ &= np\left((n-1)p(1)^{n-2} + (1-np)\right) = np(np-p+1-np) = \boxed{np(1-p)}.\end{aligned}$$

On retrouve bien l'espérance et la variance de la loi binomiale.

Cette méthode efficace peut bien sûr être utilisée pour calculer les moments d'autres lois de probabilité finies.

Exercice 2

On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto x\exp(\sin^2(x)).$$

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.*

▶ On a :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)$$

donc :

$$\begin{aligned}\sin^2(x) &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^2\\ &= x^2 - \frac{2}{6}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right).\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\exp(h) &= 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \frac{1}{4!}h^4 + \frac{1}{5!}h^5 + o_{h\to 0}\left(h^5\right)\\ &= 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 + \frac{1}{120}h^5 + o_{h\to 0}\left(h^5\right).\end{aligned}$$

Donc en posant $h = \sin^2(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)$ car $\lim_{x\to 0} h = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\exp(\sin^2(x)) =& 1 + \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^2\\ &+ \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^4\\ &+ \frac{1}{120}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^5 + o_{x\to 0}\left(\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^5\right)\\ =& 1 + \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)\\ &+ \frac{1}{6}\left(o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + \frac{1}{24}\left(o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + \frac{1}{120}\left(o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\\ =& 1 + x^2 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right) = 1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right).\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$f(x) = x\exp(\sin^2(x)) = x\left(1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) = \boxed{x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)}.$$

2. *Justifier que f réalise une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ vers un ensemble I à déterminer.*

▶ La fonction f est le sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ comme produits et composées de fonctions usuelles dérivables. On a pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$:

$$f'(x)=\exp(\sin^2(x))+x\times 2\sin'(x)\sin(x)\times\exp(\sin^2(x))=\Big(1+2x\cos(x)\sin(x)\Big)\exp(\sin^2(x)).$$

On raisonne par disjonction de cas pour étudier le signe de $x\cos(x)\sin(x)$.
<u>1^{er} cas</u> : $x\in]-\frac{\pi}{2},0]$. Alors $x\leqslant 0$, $\cos(x)\geqslant 0$ et $\sin(x)\leqslant 0$ donc $x\cos(x)\sin(x)\geqslant 0$.
<u>2^e cas</u> : $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$. Alors $x\geqslant 0$, $\cos(x)\geqslant 0$ et $\sin(x)\geqslant 0$ donc $x\cos(x)\sin(x)\geqslant 0$.
<u>Conclusion</u> : dans tous les cas, $x\cos(x)\sin(x)\geqslant 0$ et donc $f'(x)>0$ car $\exp(\sin^2(x))>0$.
On en déduit le tableau des variations de la fonction f :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}e$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}e$

Ainsi la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc d'après le théorème de la bijection continue f réalise une $\boxed{\text{bijection}}$ de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ vers l'intervalle

$$I=f(]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[)=\boxed{]-\tfrac{\pi}{2}e,\tfrac{\pi}{2}e[}.$$

Montrez que vous connaissez votre cours en précisant bien chacune des hypothèses du théorème de la bijection continue (continuité, stricte monotonie et intervalle) même si certaines d'entre elles sont évidentes à vérifier.

3. *Justifier que la bijection réciproque f^{-1} de $f|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*

▶ La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ comme produits et composées de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, on a vu à la question précédente que $f'(x)\neq 0$ pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Donc f^{-1} est $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I}$ d'après le théorème de la bijection dérivable et sa dérivée est donnée par la formule :

$$(f^{-1})':x\mapsto\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

4. *Justifier l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $f^{-1}(x)=ax+bx^3+cx^5+o_{x\to 0}(x^5)$.*

▶ Puisque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $I=]-\frac{\pi}{2}e,\frac{\pi}{2}e[$ qui contient 0, f admet un développement limité à tout ordre en 0 d'après le théorème de Taylor-Young. En particulier, on a d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 5 :

$$f^{-1}(x)=f^{-1}(0)+(f^{-1})'(0)x+\frac{(f^{-1})''(0)}{2!}x^2+\frac{(f^{-1})'''(0)}{3!}x^3+\frac{(f^{-1})^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{(f^{-1})^{(5)}(0)}{5!}x^5+o_{x\to 0}\left(x^5\right)$$

De plus on a :

$$\forall x\in]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[,\quad f(-x)=(-x)\exp(\sin^2(-x))=-x\exp((-\sin(x))^2)=-x\exp(\sin^2(x))=-f(x)$$

donc :

$$\begin{aligned}\forall y\in I,\quad f^{-1}(-y)&=f^{-1}(-f(x))\quad\text{en posant } x=f^{-1}(y)\in]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\text{ l'unique antécédent de } y \text{ par } f\\&=f^{-1}(f(-x))\quad\text{puisque } f \text{ est impaire sur }]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\\&=-x\quad\text{par définition de } f^{-1}\\&=-f^{-1}(y)\quad\text{par définition de } x.\end{aligned}$$

On en déduit que f^{-1} est impaire sur I et donc que tous les coefficients d'ordre pair de son développement limité en 0 sont nuls. Par conséquent :

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right) \text{ avec } \boxed{a = (f^{-1})'(0)}, \boxed{b = \frac{(f^{-1})'''(0)}{3!}} \text{ et } \boxed{c = \frac{(f^{-1})^{(5)}(0)}{5!}}.$$

5. *En composant les développements limités de f^{-1} et f, déterminer les valeurs des constantes a, b et c.*

▶ Puisque $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) = 0$, on a par composition des développements limités :

$$\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)) =& af(x) + bf(x)^3 + cf(x)^5 + o_{x\to 0}\left(f(x)^5\right)\\
=& a\left(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + b\left(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^3\\
&+ c\left(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^5 + o_{x\to 0}\left(\left(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)^5\right)\\
=& a\left(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right) + b\left(x^3 + 3x^4 + 3x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\right)\\
&+ c(x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right)) + o_{x\to 0}\left(x^5\right)\\
=& ax + (a+b)x^3 + \left(\frac{1}{6}a + 3b + c\right)x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$f^{-1}(f(x)) = x = x + o_{x\to 0}\left(x^5\right) \quad \text{par définition de } f^{-1}.$$

D'après l'unicité du développement limité à l'ordre 5 en 0 de $f^{-1}(f(x)) = x$, on en déduit que :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ \frac{1}{6}a + 3b + c = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a = 1 \\ b = -a = -1 \\ c = -\frac{1}{6}a - 3b = \frac{17}{6} \end{cases}.$$

Finalement, $\boxed{(a, b, c) = (1, -1, \frac{17}{6})}$.

6. *Que peut-on en déduire pour la tangente de la courbe représentative de f^{-1} au voisinage de 0 ?*

▶ On a donc d'après les résultats des questions précédentes :

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{17}{6}x^5 + o_{x\to 0}\left(x^5\right).$$

Par conséquent, la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 0 admet pour équation $\boxed{y = x}$ et :

— au voisinage à gauche de 0, la courbe $y = f(x)$ est située au dessus de sa tangente $y = x$ en 0 ;
— au voisinage à droite de 0, la courbe $y = f(x)$ est située au dessous de sa tangente $y = x$ en 0.

Problème

Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. On note 0_p l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^p$ et I_p l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^p$. On rappelle que pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$, on définit par récurrence les endomorphismes suivants :

$$f^0 = \mathrm{I}_p \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f \circ f^k.$$

On dit qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^n = 0_p$. Dans ce cas, le plus petit entier $n \geqslant 1$ qui vérifie cette propriété est appelé l'indice de nilpotence de f.

A) *Dans cette partie, on considère l'application suivante :*

$$f : (x, y, z, t) \mapsto (3x + y - 2z - 2t, -x + t, 2x + y - 2z - t, x - t).$$

1. *Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.*

▶ Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u_1} = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in \mathbb{R}^4$ et $\overrightarrow{u_2} = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}\right) =& f\left(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2, \lambda t_1 + t_2\right) \\
=& \begin{pmatrix} 3(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) - 2(\lambda z_1 + z_2) - 2(\lambda t_1 + t_2), \\ -(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda t_1 + t_2), \\ 2(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) - 2(\lambda z_1 + z_2) - (\lambda t_1 + t_2), \\ (\lambda x_1 + x_2) - (\lambda t_1 + t_2) \end{pmatrix} \\
=& \lambda \begin{pmatrix} 3x_1 + y_1 - 2z_1 - 2t_1, \\ -x_1 + t_1, \\ 2x_1 + y_1 - 2z_1 - t_1, \\ x_1 - t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_2 + y_2 - 2z_2 - 2t_2, \\ -x_2 + t_2, \\ 2x_2 + y_2 - 2z_2 - t_2, \\ x_2 - t_2 \end{pmatrix} \\
=& \lambda f(x_1, y_1, z_1, t_1) + f(x_2, y_2, z_2, t_2).
\end{aligned}$$

On en déduit que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$, donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^4}$.

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

2. *Calculer M^3. En déduire que f est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.*

▶ On a :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M \times M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $f^3 = 0_4$ donc $\boxed{f \text{ est nilpotent}}$. Et puisque $f^2 \neq 0_4$ (car la matrice M^2 de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ n'est pas la matrice nulle), on en déduit que $\boxed{\text{l'indice de nilpotence de } f \text{ est égal à } 3}$.

3. *f est-il injectif ? surjectif ?*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} &= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \\
= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix} &= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \\ \end{matrix} \\
= 2 \neq 4.
\end{aligned}$$

Puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ d'après le résultat de la question 1, on en déduit que $\boxed{f \text{ n'est ni injectif, ni surjectif}}$.

4. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f - \lambda I_4$ est bijectif si et seulement si $\lambda \neq 0$.*

► L'application $f - \lambda I_4$ est linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires. Puisque la matrice de I_4 dans la base canonique est la matrice identité d'ordre 4, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(f-\lambda I_4) &= \operatorname{rang}\left(M - \lambda\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}3-\lambda & 1 & -2 & -2\\ -1 & -\lambda & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2-\lambda & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 3-\lambda & 1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & -2-\lambda & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1 \leftrightarrow L_2\\ L_2 \leftrightarrow L_1\\ \\ \\ \end{matrix}\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda(3-\lambda) & -2 & -2+(3-\lambda)\\ 0 & 1-2\lambda & -2 & 1\\ 0 & -\lambda & 0 & -1-\lambda+1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2+(3-\lambda)L_1\\ L_3 \leftarrow L_3+2L_1\\ L_4 \leftarrow L_4+L_1\end{matrix}\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & \lambda^2-3\lambda+1 & -2 & 1-\lambda\\ 0 & 1 & -2 & 1+2\lambda\\ 0 & -\lambda & 0 & -\lambda\end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1+2\lambda\\ 0 & \lambda^2-3\lambda+1 & -2 & 1-\lambda\\ 0 & -\lambda & 0 & -\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow L_3\\ L_3 \leftrightarrow L_2\\ \\ \end{matrix}\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1+2\lambda\\ 0 & 0 & \star & \star\star\\ 0 & 0 & -2\lambda & -\lambda+\lambda(1+2\lambda)\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3-(\lambda^2-3\lambda+1)L_2\\ L_4 \leftarrow L_4+\lambda L_2\end{matrix}
\end{aligned}$$

avec $\star = -2+2(\lambda^2-3\lambda+1) = 2\lambda(\lambda-3)$ et $\star\star = 1-\lambda-(\lambda^2-3\lambda+1)(1+2\lambda) = 1-\lambda-(2\lambda^3-5\lambda^2-\lambda+1) = -\lambda^2(2\lambda-5)$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1+2\lambda\\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda^2\\ 0 & 0 & 2\lambda(\lambda-3) & -\lambda^2(2\lambda-5)\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_4\\ L_4 \leftrightarrow L_3\end{matrix}\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1+2\lambda\\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda^2\\ 0 & 0 & 0 & \star\star\star\end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4+(\lambda-3)L_3
\end{aligned}$$

avec $\star\star\star = -\lambda^2(2\lambda-5)+(\lambda-3)2\lambda^2 = \lambda^2(-2\lambda+5+2\lambda-6) = -\lambda^2$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}-1 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1+2\lambda\\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda^2\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2\end{pmatrix} = \begin{cases}2 \text{ si } \lambda = 0\\ 4 \text{ sinon}\end{cases}.$$

Or $f-\lambda I_4$ est bijectif si et seulement si $\operatorname{rang}(f-\lambda I_4) = 4$ puisque $f-\lambda I_4$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$. On en déduit que $\boxed{f-\lambda I_4 \text{ est bijectif si et seulement si } \lambda \neq 0}$.

Question très classique ! Il faut savoir mener ce type de calcul de rang à paramètre sans erreurs. Organisez-vous et soignez votre présentation.

5. (a) *Déterminer une base* $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ *de* $\text{Ker}(f)$*.*

▶ Par définition du noyau, on a :

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \right\}.$$

Or on a pour tout $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} 3x + y - 2z - 2t = 0 \\ -x + t = 0 \\ 2x + y - 2z - t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{en reprenant les mêmes opérations} \\ \text{que celles utilisées à la question 3} \end{matrix}.$$

On obtient un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues de rang 2 avec 2 équations auxiliaires compatibles et 2 inconnues auxiliaires. On en déduit la représentation paramétrique suivante de $\text{Ker}(f)$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2z - t \\ z = z \\ t = t \end{cases}, (z, t) \in \mathbb{R}^2.$$

En particulier, on a :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}\Big((0, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\Big).$$

De plus ces deux vecteurs forment une famille libre puisqu'ils sont non colinéaires. Finalement les vecteurs $\boxed{\overrightarrow{v_1} = (0, 2, 1, 0)}$ et $\boxed{\overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0, 1)}$ forment une base de $\text{Ker}(f)$.

(b) *Trouver un antécédent* $\overrightarrow{v_3}$ *de* $\overrightarrow{v_2}$ *par* f *puis un antécédent* $\overrightarrow{v_4}$ *de* $\overrightarrow{v_3}$ *par* f*.*

▶ On a pour tout $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v_2} \iff \begin{cases} 3x + y - 2z - 2t = 1 \\ -x + t = -1 \\ 2x + y - 2z - t = 0 \\ x - t = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2.$$

Puisqu'on cherche une solution, il suffit par exemple de poser $\boxed{\overrightarrow{v_3} = (1, 0, 1, 0)}$. De même, on a en reprenant les mêmes opérations :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

donc :

$$f\left(\overrightarrow{u}\right)=\overrightarrow{v_3} \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il suffit par exemple de poser $\boxed{\overrightarrow{v_4}=(0,0,1,0)}$.

(c) *Justifier que la famille $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_4})$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*

▶ On a dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_4}\right) &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \\ \\ \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 = 4.
\end{aligned}$$

Ainsi $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_4})$ est une famille libre maximale de $\mathbb{R}^4$, donc une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}^4}$.

(d) *Déterminer la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_4})$.*

▶ On a par définition des vecteurs $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_4})$:

$$\begin{aligned}
f\left(\overrightarrow{v_1}\right)=f\left(\overrightarrow{v_2}\right) = \overrightarrow{0} &= 0\overrightarrow{v_1}+0\overrightarrow{v_2}+0\overrightarrow{v_3}+0\overrightarrow{v_4} && (\text{car } \overrightarrow{v_1} \text{ et } \overrightarrow{v_2} \text{ sont des vecteurs de } \operatorname{Ker}(f)) \\
f\left(\overrightarrow{v_3}\right) = \overrightarrow{v_2} &= 0\overrightarrow{v_1}+1\overrightarrow{v_2}+0\overrightarrow{v_3}+0\overrightarrow{v_4} && (\text{car } \overrightarrow{v_3} \text{ est un antécédent de } \overrightarrow{v_2} \text{ par } f) \\
f\left(\overrightarrow{v_4}\right) = \overrightarrow{v_3} &= 0\overrightarrow{v_1}+0\overrightarrow{v_2}+1\overrightarrow{v_3}+0\overrightarrow{v_4} && (\text{car } \overrightarrow{v_4} \text{ est un antécédent de } \overrightarrow{v_3} \text{ par } f).
\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_4})$ est égale à :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

On peut aussi retrouver cette matrice à l'aide des composantes de chaque vecteur $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{v_4}$, c'est-à-dire de leurs coordonnées dans la base canonique, mais les calculs sont beaucoup plus longs. Remarquez que la matrice obtenue est identique quels que soient les choix faits aux questions précédentes.

(e) *En déduire une base de $\operatorname{Im}(f)$.*

▶ Puisque $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_4})$ est une base de $\mathbb{R}^4$, on a :

$$\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}\left(f\left(\overrightarrow{v_1}\right),f\left(\overrightarrow{v_2}\right),f\left(\overrightarrow{v_3}\right),f\left(\overrightarrow{v_4}\right)\right)=\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{0},\overrightarrow{0},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\right)=\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\right).$$

De plus, $\overrightarrow{v_2}=(1,-1,0,1)$ et $\overrightarrow{v_3}=(1,0,1,0)$ forment une famille libre puisqu'ils ne sont pas colinéaires. On en déduit que $\boxed{(\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}) \text{ forme une base de } \operatorname{Im}(f)}$.

B) *Cette partie propose de démontrer quelques propriétés générales des endomorphismes nilpotents. On fixe donc f un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^p$ quelconque et on note n son indice de nilpotence.*

1. *Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f^k \neq 0_p$ si $k < n$ et $f^k = 0_p$ si $k \geqslant n$.*

▶ Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $f^k = 0_p$ alors $k \geqslant n$ par définition de l'indice de nilpotence. Par contraposée, on en déduit que $\boxed{\text{si } k < n \text{ alors } f^k \neq 0_p}$. D'autre part, si $k \geqslant n$ alors $f^k = f^{k-n+n} = f^{k-n} \circ f^n$ car $k - n \geqslant 0$. Or $f^n = 0_p$ par définition de l'indice de nilpotence et $f^{k-n} \circ 0_p = 0_p$. Donc $\boxed{\text{si } k \geqslant n \text{ alors } f^k = 0_p}$.

2. (a) *Montrer que $\mathrm{Im}(f^{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(f)$.*

▶ Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(f^{n-1})$. Par définition de $\mathrm{Im}(f^{n-1})$, il existe un vecteur $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^p$ tel que $\overrightarrow{u} = f^{n-1}(\overrightarrow{w})$. Donc $f(\overrightarrow{u}) = f(f^{n-1}(\overrightarrow{w})) = (f \circ f^{n-1})(\overrightarrow{w}) = f^n(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}$ car $f^n = 0_p$. Par définition de $\mathrm{Ker}(f)$, on obtient que $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ et ceci est vrai pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(f^{n-1})$. Par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f^{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(f)}.$$

(b) *En déduire que f n'est pas injectif. f est-il surjectif ?*

▶ On a $f^{n-1} \neq 0_p$ d'après le résultat de la question 1 car $n - 1 < n$. En particulier, il existe un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p$ tel que $f^{n-1}(\overrightarrow{u}) \neq \overrightarrow{0}$. Or $f^{n-1}(\overrightarrow{u}) \in \mathrm{Im}(f^{n-1})$ par définition de $\mathrm{Im}(f^{n-1})$ et $\mathrm{Im}(f^{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(f)$ d'après le résultat de la question précédente. On en déduit que $f^{n-1}(\overrightarrow{u}) \in \mathrm{Ker}(f)$ avec $f^{n-1}(\overrightarrow{u}) \neq \overrightarrow{0}$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f)$ contient au moins un vecteur vecteur non nul, donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\overrightarrow{0}\}$. On en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas injectif}}$. En particulier $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 1$ et d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rang}(f) = \dim(\mathbb{R}^p) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) \leqslant p - 1.$$

En particulier $\dim(\mathrm{Im}(f)) \neq p$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjectif}}$.

3. *Le but de cette question est de démontrer que $n \leqslant p$.*

(a) *Justifier que l'ensemble $\mathbb{R}^p \setminus \mathrm{Ker}(f^{n-1})$ est non vide.*

▶ On suppose que $\mathbb{R}^p \setminus \mathrm{Ker}(f^{n-1}) = \emptyset$ donc $\mathrm{Ker}(f^{n-1}) = \mathbb{R}^p$. Par définition de $\mathrm{Ker}(f^{n-1})$, on en déduit que $f^{n-1}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p$. Par conséquent $f^{n-1} = 0_p$ ce qui contredit le résultat de la question 1 puisque $n - 1 < n$. Par l'absurde, on en déduit que $\boxed{\mathbb{R}^p \setminus \mathrm{Ker}(f^{n-1}) \neq \emptyset}$.

On fixe $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p \setminus \mathrm{Ker}(f^{n-1})$ et on suppose qu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ non tous nuls vérifiant

$$\lambda_0 \overrightarrow{u} + \lambda_1 f(\overrightarrow{u}) + \lambda_2 f^2(\overrightarrow{u}) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}.$$

On note m le plus petit des entiers $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ tels que $\lambda_k \neq 0$.

(b) *En considérant le vecteur $f^{n-1-m}(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(\overrightarrow{u}))$, montrer que $\lambda_m = 0$.*

▶ On a par hypothèse de l'énoncé :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(\overrightarrow{u}) = \lambda_0 \overrightarrow{u} + \lambda_1 f(\overrightarrow{u}) + \lambda_2 f^2(\overrightarrow{u}) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$$

donc :

$$f^{n-1-m}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(\overrightarrow{u})\right) = f^{n-1-m}\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0} \quad \text{car } f^{n-1-m} \text{ est linéaire.}$$

D'autre part, on a par linéarité de f^{n-1-m} :

$$\begin{aligned}
f^{n-1-m}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k\left(\overrightarrow{u}\right)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^{n-1-m}\left(f^k\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\left(f^{n-1-m}\circ f^k\right)\left(\overrightarrow{u}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^{n-1-m+k}\left(\overrightarrow{u}\right)\\
&= \lambda_0 f^{n-1-m}\left(\overrightarrow{u}\right)+\lambda_1 f^{n-m}\left(\overrightarrow{u}\right)+\cdots+\lambda_{m-1}f^{n-2}\left(\overrightarrow{u}\right)\\
&\quad +\lambda_m f^{n-1}\left(\overrightarrow{u}\right)\\
&\quad +\lambda_{m+1}f^{n}\left(\overrightarrow{u}\right)+\lambda_{m+2}f^{n+1}\left(\overrightarrow{u}\right)+\cdots+\lambda_{n-1}f^{2n-2-m}\left(\overrightarrow{u}\right).
\end{aligned}$$

Or $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_{m-1}=0$ par définition de m et $f^n=f^{n+1}=\cdots=f^{2n-2-m}=0_p$ d'après le résultat de la question 1. On en déduit que :

$$\overrightarrow{0}=f^{n-1-m}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k\left(\overrightarrow{u}\right)\right)=\overrightarrow{0}+\lambda_m f^{n-1}\left(\overrightarrow{u}\right)+\overrightarrow{0}$$

donc $\lambda_m=0$ ou $f^{n-1}(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$. Or $\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^p\setminus\operatorname{Ker}(f^{n-1})$ donc $f^{n-1}(\overrightarrow{u})\neq\overrightarrow{0}$ par définition de $\operatorname{Ker}(f^{n-1})$. Finalement, on a montré que $\boxed{\lambda_m=0}$.

(c) *Que peut-on en déduire pour la famille $(\overrightarrow{u},f(\overrightarrow{u}),f^2(\overrightarrow{u}),\ldots,f^{n-1}(\overrightarrow{u}))$?*

▶ On a $\lambda_m\neq 0$ par définition de m et $\lambda_m=0$ d'après le résultat de la question précédente. Ceci est absurde. On en déduit que l'hypothèse de l'énoncé est fausse : il n'existe pas de réels $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ non tous nuls tels que $\lambda_0\overrightarrow{u}+\lambda_1 f(\overrightarrow{u})+\cdots+\lambda_{n-1}f^{n-1}(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$. Par conséquent, $\boxed{\text{la famille }(\overrightarrow{u},f(\overrightarrow{u}),f^2(\overrightarrow{u}),\ldots,f^{n-1}(\overrightarrow{u}))\text{ est libre.}}$

(d) *Conclure.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a trouvé une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^p$. Puisque $\dim(\mathbb{R}^p)=p$, on en déduit que $\boxed{n\leqslant p}$.

4. *Soit $\lambda\in\mathbb{R}^\star$. On pose $g=\mathrm{I}_p+f+f^2+\cdots+f^{n-1}$.*

(a) *Simplifier $(f-\mathrm{I}_p)\circ g$.*

▶ On a par linéarité :

$$\begin{aligned}
(f-\mathrm{I}_p)\circ g &= (f-\mathrm{I}_p)\circ(\mathrm{I}_p+f+f^2+\cdots+f^{n-1}) = (f-\mathrm{I}_p)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}f^k\right)\\
&= f\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}f^k\right)-\mathrm{I}_p\left(\sum_{k=0}^{n-1}f^k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\circ f^k\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{I}_p\circ f^k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}f^{k+1}-\sum_{k=0}^{n-1}f^k=\sum_{k=1}^{n}f^k-\sum_{k=0}^{n-1}f^k=f^n-\mathrm{I}_p
\end{aligned}$$

en reconnaissant une somme télescopique. Or $f^n=0_p$ par définition de l'indice de nilpotence donc $\boxed{(f-\mathrm{I}_p)\circ g=-\mathrm{I}_p}$.

(b) *En déduire que $f-\mathrm{I}_p$ est bijectif et déterminer sa bijection réciproque en fonction de g.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a par linéarité :

$$(f-\mathrm{I}_p)\circ(-g)=-\Big((f-\mathrm{I}_p)\circ g\Big)=-(-\mathrm{I}_p)=\mathrm{I}_p.$$

D'autre part, on a en raisonnant comme à la question précédente :

$$g\circ(f-\mathrm{I}_p)=(\mathrm{I}_p+f+f^2+\cdots+f^{n-1})\circ(f-\mathrm{I}_p)=\cdots=f^n-\mathrm{I}_p=-\mathrm{I}_p$$

donc par linéarité :

$$(-g)\circ(f-\mathrm{I}_p) = -\Big(g\circ(f-\mathrm{I}_p)\Big) = -(-\mathrm{I}_p) = \mathrm{I}_p.$$

Ainsi, on a trouvé un endomorphisme $-g$ tel que $(f-\mathrm{I}_p)\circ(-g) = \mathrm{I}_p$ et $(-g)\circ(f-\mathrm{I}_p) = -\mathrm{I}_p$. On en déduit que $\boxed{f-\mathrm{I}_p \text{ est bijectif}}$ et que sa bijection réciproque est $\boxed{(f-\mathrm{I}_p)^{-1} = -g}$.

N'oubliez pas de vérifier la composition à gauche et à droite pour justifier une inversibilité !

(c) Justifier que $\frac{1}{\lambda}f$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^p$ d'indice de nilpotence égal à n.

▶ On a par linéarité :

$$\left(\tfrac{1}{\lambda}f\right)^n = \underbrace{\left(\tfrac{1}{\lambda}f\right)\circ\left(\tfrac{1}{\lambda}f\right)\circ\cdots\circ\left(\tfrac{1}{\lambda}f\right)}_{n \text{ fois}} = \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^n \Bigg(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ fois}}\Bigg) = \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^n f^n.$$

Or $f^n = 0_p$ par définition de l'indice de nilpotence donc $\left(\frac{1}{\lambda}f\right)^n = 0_p$. On en déduit que $\boxed{\frac{1}{\lambda}f \text{ est un endomorphisme nilpotent}}$. De plus, pour tout entier $k\in\mathbb{N}$ tel que $k<n$ on a en raisonnant de même que $\left(\frac{1}{\lambda}f\right)^k = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^k f^k \neq 0_p$ d'après le résultat de la question 1. Donc n est le plus petit entier tel que $\left(\frac{1}{\lambda}f\right)^n = 0_p$. Autrement dit, $\boxed{n \text{ est l'indice de nilpotence de } \frac{1}{\lambda}f}$.

(d) En déduire que $f-\lambda\mathrm{I}_p$ est bijectif et déterminer sa bijection réciproque en fonction de λ, f et n.

▶ On a : $f-\lambda\mathrm{I}_p = \lambda\left(\frac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)$. D'après le résultat de la question 4(b) appliqué à l'endomorphisme $\frac{1}{\lambda}f$ (on peut bien l'appliquer car $\frac{1}{\lambda}f$ est un endomorphisme nilpotent comme f de même indice de nilpotence), on obtient que $\frac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p$ est bijectif de bijection réciproque :

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1} &= -\left(\mathrm{I}_p+\tfrac{1}{\lambda}f+\left(\tfrac{1}{\lambda}f\right)^2+\cdots+\left(\tfrac{1}{\lambda}f\right)^{n-1}\right)\\ &= -\left(\mathrm{I}_p+\tfrac{1}{\lambda}f+\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2 f^2+\cdots+\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^{n-1} f^{n-1}\right).\end{aligned}$$

De plus, on a par linéarité :

$$\begin{aligned}(f-\lambda\mathrm{I}_p)\circ\left(\tfrac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1}\right) &= \left(\lambda\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)\right)\circ\left(\tfrac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1}\right)\\ &= \left(\lambda\times\tfrac{1}{\lambda}\right)\left(\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)\circ\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1}\right) = \mathrm{I}_p\\ \text{et}\quad \left(\tfrac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1}\right)\circ(f-\lambda\mathrm{I}_p) &= \left(\tfrac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1}\right)\circ\left(\lambda\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)\right)\\ &= \left(\tfrac{1}{\lambda}\times\lambda\right)\left(\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1}\circ\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)\right) = \mathrm{I}_p.\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{f-\lambda\mathrm{I}_p}$ est bijectif et que sa bijection réciproque est :

$$(f-\lambda\mathrm{I}_p)^{-1} = \tfrac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{\lambda}f-\mathrm{I}_p\right)^{-1} = \boxed{-\tfrac{1}{\lambda}\left(\mathrm{I}_p+\tfrac{1}{\lambda}f+\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2 f^2+\cdots+\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^{n-1} f^{n-1}\right)}.$$

Devoir surveillé 8 mathématiques

BCPST 1 2016-2017

— Durée : 45 minutes.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_p(x) = \frac{1}{(1+x^2)^p}$ et $I_p = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^p} dx$.

1. Écrire un programme permettant d'afficher la courbe de f_1 sur l'intervalle $[0,1]$. On considérera 100 points de l'intervalle.
2. Calculer I_0, I_1.
3. Écrire une fonction `sommeRiemmann(n,p)` qui retourne la valeur $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_p(\frac{k}{n})$. On supposera $n \geq 1$.
4. On fixe $n \geq 1$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \{0, \cdots, n-1\},\ \forall t \in [\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n}],\ \frac{1}{1+\left(\frac{(k+1)}{n}\right)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$.
   (b) En déduire que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k+1}{n})^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$.
   (c) En déduire une fonction `approx(ecart)` qui retourne une liste $[a,b]$ où $a \leq \frac{\pi}{4} \leq b$ et $|b-a| \leq$ `ecart`.
5. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, I_p = 2^{-p} + 2p(I_p - I_{p+1})$.
   En déduire que
   $$\forall p \geq 1, I_{p+1} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right) I_p + \frac{1}{p2^{p+1}}. \qquad \text{(R)}$$
   (b) En déduire une fonction `calculeI(p)` qui retourne la valeur de I_p pour $p \in \mathbb{N}$ en utilisant la relation de récurrence (R) et les valeurs de I_0, I_1. On supposera que le nombre π est donnée en Python par la variable `pi`.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$. En étudiant le signe de $f_p - f_{p+1}$, montrer que la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et en déduire sa nature.
7. On cherche à déterminer la limite de $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
   (a) Pour tout $p \geq 3$, justifier que l'on a $I_p = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}} f_p(x)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}}^1 f_p(x)dx$.
   (b) En déduire que pour tout $p \geq 3$, $0 \leq I_p \leq \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}} + \frac{1}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p}$.
   (c) En déduire la limite de $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
8. On suppose que la variable `pi` contient la valeur de π. On considère les fonctions suivantes :

```
def test1() :
    for i in range(1,60) :
        print(calculeI(i)*(i**0.5)*2/(pi**0.5))
def test2() :
    for i in range(1,60) :
        print(calculeI(i)*i)
def test3() :
    for i in range(1,60) :
        print(calculeI(i)/i)
```

Lorsque l'on exécute ces programmes on constate que l'on obtient les affichages suivants :

`test1()`	0.886...	1.025...	1.064...	1.071...	1.067...	1.061...	1.054...	...
`test2()`	0.785...	1.285...	1.633...	1.898...	2.115...	2.303...	2.472...	...
`test3()`	0.785...	0.321...	0.181...	0.118...	0.084...	0.063...	0.050...	...

Déduire de ces tests informatiques un équivalent possible pour I_p. On l'écrira sous la forme Cp^α.

Correction

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_p(x) = \frac{1}{(1+x^2)^p}$ et $I_p = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^p} dx$.

1.
```
import matplotlib.pyplot as mpl
L=[i/99 for i in range(100)]
M=[1/(1+x**2) for x in L]
mpl.plot(L,M)
```

2. Par définition,
$$I_0 = \int_0^1 1dx = 1, I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$
On a donc
$$\boxed{I_0 = 1, I_1 = \frac{\pi}{4}}.$$

3.
```
def sommeRiemmann(n,p) :
    S=0
    for i in range(n) :
        S=S+1/((1+(i/n)**2)**p)
    return S/n
```

4. (a) Soit $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. et $t \in [\frac{k}{n}, \ \frac{k+1}{n}]$. On a
$$0 \leq \frac{k}{n} \leq t \leq (\frac{k+1}{n}).$$
Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$,
$$0 \leq (\frac{k}{n})^2 \leq t^2 \leq (\frac{k+1}{n})^2.$$
Donc
$$1 \leq 1 + (\frac{k}{n})^2 \leq 1 + t^2 \leq 1 + (\frac{k+1}{n})^2.$$
Par décroissance de la fonction inverse sur $R^{+\star}$, on a donc
$$1 \geq \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} \geq \frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{1+(\frac{k+1}{n})^2} > 0.$$
Par conséquent, $\boxed{\frac{1}{1+\left(\frac{(k+1)}{n}\right)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}}.$

(b) Soit $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, en intégrant sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ l'inégalité de la question 3, on a
$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{1+\left(\frac{(k+1)}{n}\right)^2} dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}.dt$$
Donc
$$\frac{1}{n} \frac{1}{1+\left(\frac{(k+1)}{n}\right)^2} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}.$$
En sommant sur $\{0, \cdots, n-1\}$, on obtient alors
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k+1}{n})^2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}.$$
Autrement dit,
$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k+1}{n})^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}}.$$

(c) On peut remarquer dans l'inégalité de la question 4, en soustrayant celle-ci par le membre gauche, on obtient

$$0 \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k+1}{n})^2} \leq \frac{1}{n}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2n}$$

Ainsi, pour l'écart e, il suffit d'avoir n vérifiant $\frac{1}{2n} < \mathrm{e}$.

```
def approx(ecart) :
    n=1
    while(1/(2*n))>e :
        n=2*n
    a=0
    b=0
    for i in range(n) :
        a=a+1/(1+((i+1)/n)**2)
        b=b+1/(1+(i/n)**2)
    return [a/n,b/n]
```

5. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Par définition, $I_p = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^p}dx$. Les fonctions $u : x \mapsto 1$ et f_p étant respectivement C^0 et C^1 sur $[0,1]$, on peut effectuer une intégration par parties. De plus,

$$U(x) = x, f_p'(x) = \frac{-2px}{(1+x^2)^{p+1}}$$

D'où

$$I_p = [xf_p(x)]_{x=0}^{x=1} + 2p\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{p+1}}dx$$

Donc

$$I_p = 2^{-p} + 2p\left(\int_0^1 \frac{x^2+1}{(1+x^2)^{p+1}}dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{p+1}}dx\right).$$

D'où

$$\boxed{I_p = 2^{-p} + 2p(I_p - I_{p+1})}.$$

Soit $p \geq 1$. On a

$$I_p = 2^{-p} + 2p(I_p - I_{p+1}).$$

Donc

$$2pI_{p+1} = 2^{-p} + (2p-1)I_p.$$

D'où

$$\boxed{I_{p+1} = 2^{-p-1} + \frac{2p-1}{2p}I_p.}$$

(b)

```
def calculeI(p) :
    if p==0 :
        return 1
    I=pi/4
    for i in range(1,p) :
        I=2**(-1-i)+((2*i-1)/(2*i))*I
    return I
```

6. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$:

$$f_p(t) - f_{p+1}(t) = \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{p+1}} = \frac{t^2}{(1+t^2)^{p+1}} \geq 0.$$

Donc, en intégrant on obtient

$$I_p - I_{p+1} \geq 0.$$

La suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction f_p est positive sur $[0,1]$. Donc I_p est positive.

On en déduit que la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc est convergente.

7. (a) Soit $p \geq 3$. D'après la relation de Chasles, on a $I_p = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}} f_p(x)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}}^1 f_p(x)dx$.

(b) Soit $p \geq 3$. La fonction f_p étant l'inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, f_p est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_p'(x) = \frac{-2px}{(1+x^2)^{p+1}}.$$

D'où

$$\forall x \geq 0, f_p'(x) \leq 0.$$

f_p est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En particulier,

$$\forall t \in [0, \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}], f_p(t) \leq f_p(0) = 1.$$

En intégrant, on a donc

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}} f_p(x)dx \leq \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}.$$

De même, comme $p \geq 3$, $\ln(p) \geq 1$, donc $\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}} \leq 1$. D'où

$$\forall t \in [\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}, 1], f_p(t) \leq f_p\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}\right).$$

Donc, en intégrant,

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}}^1 f_p(t)dt \leq \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p} \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p}.$$

D'un côté, on a

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}} f_p(x)dx \leq \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}$$

De l'autre

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\ln(p)}}}^1 f_p(t)dt \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p}.$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient alors

$$\boxed{I_p \leq \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}} + \frac{1}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p}.}$$

(c) Lors que $p \to +\infty$, on a $\ln(p) \to +\infty$, donc $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}} = 0$.

De plus, $(1+\frac{1}{\ln(p)})^p = e^{p(\ln(1+\frac{1}{\ln(p)})}$. Or, $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{\ln(p)} = 0$, donc

$$\ln(1+\frac{1}{\ln(p)}) \sim_{p\to+\infty} \frac{1}{\ln(p)}.$$

D'où

$$p\ln(1+\frac{1}{\ln(p)}) \sim \frac{p}{\ln(p)}.$$

Or $\lim_{p\to+\infty} \frac{p}{\ln(p)} = +\infty$ par croissance comparée. Donc

$$\lim_{p\to+\infty} p\ln(1+\frac{1}{\ln(p)}) = +\infty.$$

Or $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. Par composition, on a donc $\lim_{p\to+\infty}(1+\frac{1}{\ln(p)})^p = +\infty$. En passant à l'inverse, on obtient $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p} = 0$.

Par conséquent,

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(p)}} + \frac{1}{(1+\frac{1}{\ln(p)})^p} = 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, il en résulte que $\boxed{\lim_{p\to+\infty} I_p = 0}$.

8. Des trois tests, le premier semble nous fournir un équivalent de $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Plus précisément, il semble que l'on ait $\boxed{I_p \sim_{p\to+\infty} \sqrt{\pi}p^{-\frac{1}{2}}}$.

Exercice 3

On propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ dx.$$

Pour cela, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1-t^2}{2t}$ pour tout $t<0$.

1. À l'aide du changement de variable $x = \varphi(t)$ dont on vérifiera précisément les hypothèses, montrer que

$$I = \frac{1}{4}\int_{-1}^{-(1+\sqrt{2})} \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt.$$

2. À l'aide d'un changement de variable à déterminer, montrer que

$$I = \frac{1}{4}\int_{1}^{1+\sqrt{2}} \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt.$$

3. Conclure.

Correction

On propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ dx.$$

Pour cela, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1-t^2}{2t}$ pour tout $t<0$.

1. Sur $]-\infty,0[$, la fonction φ étant un quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle, φ est C^1. Calculons φ'. Soit $t<0$:

$$\begin{array}{rcl} \varphi'(t) & = & \frac{-4t^2-(1-t^2)2}{4t^2} \\ & = & \frac{-2-2t^2}{4t^2} \\ & = & \frac{-2(1+t^2)}{4t^2} \\ & = & \frac{-(1+t^2)}{2t^2} \end{array}$$

Donc φ' est strictement négatif sur $\mathbb{R}^{-\star}$. On en déduit que φ est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$. Or φ étant continue sur cet intervalle et $\lim_{t\to-\infty}\varphi(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to 0^-}\varphi(t) = -\infty$, d'après le corollaire des valeurs intermédiaires, φ réalise une bijection de $]-\infty,0[$ vers $\mathbb{R}$. Or

$$\varphi(-1) = 0, \varphi(-1-\sqrt{2}) = \frac{1-(1+\sqrt{2})^2}{-2(1+\sqrt{2})} = \frac{-2\sqrt{2}-2}{-2(1+\sqrt{2})} = \frac{-2(1+\sqrt{2})}{-2(1+\sqrt{2})} = 1.$$

Par conséquent, φ réalise une bijection de $[-1-\sqrt{2},-1]$ vers $[0,1]$.
Calcul de dx et de dt :

$$dx = \frac{-(1+t^2)}{2t^2}dt,$$

Donc

$$\sqrt{1+x^2}dx = -\sqrt{1+\varphi(t)^2}\frac{(1+t^2)}{2t^2}dt$$

D'où

$$\sqrt{1+x^2}dx = -\sqrt{1+\frac{(1-t^2)^2}{4t^2}}\frac{(1+t^2)}{2t^2}dt$$

Donc

$$\sqrt{1+x^2}dx = -\sqrt{4t^2+(1-t^2)^2}\frac{(1+t)}{4|t|t^2}dt$$

D'où

$$\sqrt{1+x^2}dx = -\sqrt{t^4+2t^2+1}\frac{(1+t^2)}{4|t|t^2}dt$$

Or $t<0$, d'où

$$\sqrt{1+x^2}dx = \frac{(1+t^2)^2}{4t^3}dt$$

En intégrant, on a donc

$$\boxed{I = \frac{1}{4}\int_{-1}^{-(1+\sqrt{2})} \frac{(1+t^2)^2}{t^3}dt.}$$

2. Posons $x=-t$, on a alors $dx=-dt$. Et :

$$I = \frac{1}{4}\int_{1}^{1+\sqrt{2}} \frac{(1+x^2)^2}{(-x)^3}(-dx) = \frac{1}{4}\int_{1}^{1+\sqrt{2}} \frac{(1+x^2)^2}{x^3}dx.$$

3. On a donc

$$I = \frac{1}{4}\int_{1}^{1+\sqrt{2}} (\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x}+x)dx.$$

Donc

$$I = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(1-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}) + 2\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^2-1)\right)$$

D'où

$$I = \frac{1}{8}\left((1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} + 4\ln(1+\sqrt{2})\right)$$

Donc

$$I = \frac{1}{8}\left((1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2 + 4\ln(1+\sqrt{2})\right)$$

D'où

$$I = \frac{1}{8}\left(4\sqrt{2} + 4\ln(1+\sqrt{2})\right)$$

Donc

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}}.$$