Devoir surveillé 1 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit qu'il est symétrique s'il est non vide et :

$$\forall a \in A, -a \in A.$$

1. Indiquer sans justifier pour chacun de ces ensembles s'ils sont symétriques ou non.
   (a) $\mathbb{R}$ (b) $[0, 1[$ (c) $[-1, 1]$ (d) $[-1, 1[$.
2. Montrer que si un ensemble est symétrique alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, si $-x \in A$ alors $x \in A$.
3. Soit A un ensemble symétrique. Montrer que si A admet comme borne supérieure M alors il admet comme borne inférieure $-M$. Qu'en est-il de la réciproque ? Justifier.
4. Montrer que si un ensemble symétrique admet comme maximum M alors il admet comme minimum $-M$. Qu'en est-il de la réciproque ? Justifier.
5. Déterminer tous les intervalles qui sont des ensembles symétriques.
6. Déterminer les ensembles symétriques dont la borne inférieure est égale à la borne supérieure.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations d'inconnue réelle x :

1. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \geq 1$. 2. $\frac{x^2+x+1}{2x^2-3x+1} \geq 1$.

Exercice 3. Soit $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$.

Exercice 4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Exercice 5. Soient n un entier supérieur à 2 et $x_1, \cdots, x_n$ des réels. Montrer que $|x_1 + \cdots + x_n| = |x_1| + \cdots + |x_n|$ si et seulement si $x_1, \cdots, x_n$ sont tous de même signe.

Exercice 6. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x et de paramètre réel a :

$$|x + 1| + |x - 1| = a.$$

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.
On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Montrer que :

$$\exists m \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = m.$$

On pourra considérer l'ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et se rappeler que toute partir non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On considère les deux propositions suivantes :

1. $P_1 : \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
2. $P_2 : \forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leq M$.

Déterminer la valeur de vérité de chacune de ces propositions et justifier.