Devoir surveillé 1 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit qu'il est symétrique s'il est non vide et :

$$\forall a \in A, -a \in A.$$

1. Indiquer sans justifier pour chacun de ces ensembles s'ils sont symétriques ou non.

   (a) $\mathbb{R}$ (b) $[0, 1[$ (c) $[-1, 1]$ (d) $[-1, 1[$.

2. Montrer que si un ensemble est symétrique alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, si $-x \in A$ alors $x \in A$.
3. Soit A un ensemble symétrique. Montrer que si A admet comme borne supérieure M alors il admet comme borne inférieure $-M$. Qu'en est-il de la réciproque ? Justifier.
4. Montrer que si un ensemble symétrique admet comme maximum M alors il admet comme minimum $-M$. Qu'en est-il de la réciproque ? Justifier.
5. Déterminer tous les intervalles qui sont des ensembles symétriques.
6. Déterminer les ensembles symétriques dont la borne inférieure est égale à la borne supérieure.

Correction

1. $\mathbb{R}$, $[-1, 1]$ sont symétriques. $[0, 1[$ et $[-1, 1[$ ne le sont pas.
2. Soit A un ensemble symétrique et $x \in \mathbb{R}$ tel que $-x \in A$. D'après la définition de symétrique, on en déduit que $-(-x) \in A$. Autrement dit, $\boxed{x \in A}$.
3. Soit M la borne supérieure d'un ensemble symétrique A. Montrons que $-M$ est la borne inférieure de A. Montrons que $-M$ est un minorant de A. Soit $x \in A$. On a $x \leq M$. A étant symétrique, $-x$ est un élément de A donc $-x \leq M$. D'où $x \geq -M$. Par conséquent,

   $$\forall x \in A, x \geq -M.$$

   $-M$ est donc un minorant de A. Montrons que $-M$ est la borne inférieure de A.

   Soit m un minorant de A et montrons que $m \leq -M$. Montrons que $-m$ est un majorant de A. Soit $x \in A$. A étant symétrique, $-x \in A$. On a donc : $m \leq -x$. D'où $-m \geq x$. Donc

   $$\forall x \in A, -m \geq x.$$

   $-m$ est donc un majorant de A. Or M est la borne supérieure de A. Donc $-m \geq M$. D'où $m \leq -M$.

   Tout minorant de A est donc plus petit que $-M$. On en déduit que $-M$ est la borne inférieure de A.

   De la même manière, on montre que si $-M$ est la borne inférieure de A alors M est la borne supérieure de A. Le raisonnement mené est similaire au précédent, en inversant les rôles de M et de $-M$, de borne supérieure avec borne inférieure, de majorant avec minorant.
4. Soit A un ensemble symétrique admettant M comme maximum. Donc M est la borne supérieure de A. D'après la question 2, on en déduit que $-M$ est la borne inférieure de A. Or A est symétrique et $M \in A$. Donc $-M$ est un élément de A. Par conséquent, $-M$ est le minimum de A.

   De même, si A admet $-M$ comme minimum, il admet M comme maximum. Il suffit dans la preuve précédente d'inverser le rôle de M avec $-M$, de majorant avec de minorant, de borne supérieure avec borne inférieure ; de maximum avec minimum.
5. On cherche tous les intervalles symétriques.

— Cas 1 : A n'a pas de borne supérieure.
Montrons alors que $A = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que A est non vide et n'a pas de borne supérieure. Il existe donc $M \in A$ tel que $|x| \leq M$. Or A et symétrique donc $-M \in A$. On a donc $-M \leq x \leq M$. Mais A est un intervalle, donc $x \in A$. On en déduit dans ce cas que $A = \mathbb{R}$.

— Cas 2 : A possède une borne supérieure mais ne la contient pas.
Notons M celle-ci. Nécessairement, $M > 0$. En effet, on a $M \geq -M$ et si on avait $M = -M$ alors $M = 0$. Dans ce cas, il n'y aurait pas d'élément dans A ce qui est absurde puisque A est non vide.
Par symétrie de A, on sait que $-M$ est la borne inférieure de A et comme $M \notin A$, $-M \notin A$. Or A est un intervalle. Donc on a $A =]-M, M[$.

— Cas 3 : A contient sa borne supérieure. Ici, on a $M \geq 0$, pour les mêmes raisons que précédemment.
Notons M celle-ci. M est donc le maximum de A. Par symétrie de A, on en déduit que $-M$ est le minimum de A. Comme A est un intervalle, il en résulte que $A = [-M, M]$.

En résumé, un intervalle symétrique est l'une des formes suivantes,

(a) $\mathbb{R}$

(b) $[-M, M]$, pour M décrivant $\mathbb{R}^+$,

(c) $]-M, M[$, pour M décrivant $\mathbb{R}^{+\star}$.

Réciproquement, on constate que chacun des intervalles précédents est symétrique. On a ainsi caractérisé tous les intervalles symétriques.

6. On suppose que borne inférieure et borne supérieure sont égales. On a donc $M = -M$. Donc $M = 0$. Or pour tout $a \in A$, on a
$$-M \leq a \leq M.$$
D'où pour tout $a \in A, M \leq a \leq M$. Autrement dit, $a = M = 0$. Comme A est non vide, on en déduit que A est réduit à l'ensemble $\{0\}$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations d'inconnue réelle x :

1. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \geq 1$. 2. $\frac{x^2+x+1}{2x^2-3x+1} \geq 1$.

Correction

1. Notons cette inéquation (I_1). Elle est définie si et seulement si $x \geq 1$. Soit $x \geq 1$. Constatons que
$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \geq 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow x+1 \geq x-1 \qquad \text{stricte croissante de la fonction racine sur } \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow 1 \geq -1 \\ &\Leftrightarrow \text{VRAI} \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} (I_1) &\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2 \geq 1 \\ &\Leftrightarrow (x+1) - 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1} + x - 1 \geq 1 \\ &\Leftrightarrow 2x - 1 \geq 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 4(x+1)(x-1) \qquad (x \geq 1) \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 4x^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow 5 \geq 4x \\ &\Leftrightarrow \tfrac{5}{4} \geq x \end{aligned}$$
Par conséquent, $\boxed{S = \left[1, \frac{5}{4}\right]}$.

2. Notons cette inéquation (I_2). Elle est définie si et seulement si $2x^2 - 3x + 1 \neq 0$. Déterminons les solutions de cette équation de degré 2. Elle admet comme solution évidente 1. D'après les formules sur les sommes et produit, on en déduit que l'autre solution est $\frac{1}{2}$. Par conséquent, l'inéquation (I_2) est définie si et seulement si $x \in \mathbb{R} \backslash \{1, \frac{1}{2}\}$.
Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \{1, \frac{1}{2}\}$.
$$\begin{aligned} (I_2) &\Leftrightarrow \tfrac{x^2+x+1}{2x^2-3x+1} - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{x^2+x+1-(2x^2-3x+1)}{2x^2-3x+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{-x^2+4x}{2x^2-3x+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{-x(x-4)}{2(x-1)(x-\frac{1}{2})} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{x(x-4)}{(x-1)(x-\frac{1}{2})} \leq 0 \end{aligned}$$

À l'aide d'un tableau de signe, on en déduit que $\boxed{S = [0, \frac{1}{2}[\cup]1, 4]}$.

Exercice 3. Soit $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$.

Correction

On a

$$\begin{array}{rcll} \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} & \Leftrightarrow & \frac{2ab}{b+a} \leq \sqrt{ab} & \\ & \Leftrightarrow & (\frac{2ab}{b+a})^2 \leq ab & (a > 0, b > 0) \\ & \Leftrightarrow & \frac{4(ab)^2}{ab} \leq (a+b)^2 & (a > 0, b > 0) \\ & \Leftrightarrow & 4(ab) \leq (a+b)^2 & (a > 0, b > 0) \\ & \Leftrightarrow & 0 \leq a^2 + b^2 - 2ab & (a > 0, b > 0) \\ & \Leftrightarrow & 0 \leq (a-b)^2 & (a > 0, b > 0) \\ & \Leftrightarrow & \text{VRAI} & \end{array}$$

Par équivalence que l'inéquation initiale est toujours vérifiée.

Exercice 4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) : 0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie par récurrence.

— Initialisation :
on a $0^4 = 0$ et $\frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)(3\cdot 0^2+3\cdot 0-1)}{30} = 0$.
Donc $P(0)$ est vraie.

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.
D'après $P(n)$, on a :

$$0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Donc

$$0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 + (n+1)^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} + (n+1)^4.$$

Donc

$$0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 + (n+1)^4 = \frac{n+1}{30}\left(n(2n+1)(3n^2+3n-1) + 30(n+1)^3\right).$$

Or, en développant, on a

$$\begin{array}{rcl} n(2n+1)(3n^2+3n-1) + 30(n+1)^3 & = & 6n^4 + 9n^3 + n^2 - n + 30n^3 + 90n^2 + 90n + 30 \\ & = & 6n^4 + 39n^3 + 91n^2 + 89n + 30 \end{array}$$

et en développant

$$\begin{array}{rcl} (n+2)(2n+3)(3(n+1)^2 + 3(n+1) - 1) & = & (2n^2 + 7n + 6)(3n^2 + 6n + 3 + 3n + 2) \\ & = & (2n^2 + 7n + 6)(3n^2 + 9n + 5) \\ & = & 6n^4 + 18n^3 + 10n^2 + 21n^3 + 63n^2 + 35n + 18n^2 + 54n + 30 \\ & = & 6n^4 + 39n^3 + 91n^2 + 89n + 30 \end{array}$$

On en déduit que $n(2n+1)(3n^2+3n-1) + 30(n+1)^3 = (n+2)(2n+3)(3(n+1)^2 + 3(n+1) - 1)$. D'où

$$\boxed{0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 + (n+1)^4 = \frac{n+1}{30}(n+2)(2n+3)(3(n+1)^2 + 3(n+1) - 1).}$$

La proposition $P(n+1)$ est donc vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.}$$

Exercice 5. Soient n un entier supérieur à 2 et $x_1, \cdots, x_n$ des réels. Montrer que $|x_1 + \cdots + x_n| = |x_1| + \cdots + |x_n|$ si et seulement si $x_1, \cdots, x_n$ sont tous de même signe.

Correction

Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$P(n) : \forall (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n, |x_1 + \cdots + x_n| = |x_1| + \cdots + |x_n| \Leftrightarrow (x_1 \geq 0, \cdots x_n \geq 0) \text{ ou } (x_1 \leq 0, \cdots x_n \leq 0).$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $P(n)$ est vraie.

— Initialisation :
Soit x_1, x_2 deux réels. On a

$$\begin{array}{rclll} |x_1 + x_2| = |x_1| + |x_2| & \Leftrightarrow & (x_1+x_2)^2 & = & (|x_1| + |x_2|)^2 \quad (|x_1+x_2| \geq 0, |x_1| + |x_2| \geq 0) \\ & \Leftrightarrow & x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 & = & |x_1|^2 + 2|x_1||x_2| + |x_2|^2 \\ & \Leftrightarrow & x_1x_2 & = & |x_1x_2| \\ & \Leftrightarrow & x_1x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Autrement dit, il y a l'égalité initiale si et seulement si x_1 et x_2 sont de même signe.

— Hérédité :
Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 2$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
Supposons que $|x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}| = |x_1| + \cdots |x_{n+1}|$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|(x_1 + \cdots x_n) + x_{n+1}| \leq |x_1 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| \leq |x_1| + \cdots + |x_{n+1}.$$

Par hypothèse, $|(x_1 + \cdots x_n) + x_{n+1}| = |x_1| + \cdots + |x_{n+1}|$. On en déduit que

$$|x_1 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| = |(x_1 + \cdots + x_n) + x_{n+1}| = |x_1| + \cdots + |x_n| + |x_{n+1}|.$$

Par conséquent,

$$|x_1 + \cdots + x_n| = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

D'après $P(n)$, en déduit que $x_1, \cdots, x_n$ sont tous de même signe, donc $x_1 + \cdots + x_n$ a même signe que ces valeurs. Or

$$|x_1 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| = |(x_1 + \cdots + x_n) + x_{n+1}|$$

D'après $P(2)$, on en déduit que x_{n+1} a même signe que $(x_1 + \cdots + x_n)$.
En résumé, on en déduit que $x_1, \cdots, x_{n+1}$ ont tous le même signe.
Réciproquement, si $x_1, \cdots x_{n+1}$ ont tous le même signe, on a

— Cas 1 : ils sont positifs. On a alors

$$|x_1 + \cdots x_{n+1}| = x_1 + \cdots + x_{n+1}, |x_1| + \cdots + |x_{n+1}| = x_1 + \cdots + x_{n+1}$$

Il y a bien égalité.

— Cas 2 : ils sont tous négatifs. On a alors

$$|x_1 + \cdots x_{n+1}| = -(x_1 + \cdots + x_{n+1}), |x_1| + \cdots + |x_{n+1}| = -x_1 - \cdots - x_{n+1}$$

Il y a bien égalité.
Par conséquent, $P(n+1)$ est bien vraie.

— Conclusion : pour tout $n \geq 2$,

$$\boxed{\forall (x_1 \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, |x_1 + \cdots + x_n| = |x_1| + \cdots + |x_n| \Leftrightarrow (x_1 \geq 0, \cdots x_n \geq 0) \text{ ou } (x_1 \leq 0, \cdots, x_n \leq 0)}$$

Exercice 6. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x et de paramètre réel a :

$$|x+1| + |x-1| = a.$$

Correction

Notons cette équation (E). On procède par disjonction de cas.

— Cas 1 : $x \leq -1$.

$$\begin{array}{rcl} (E) & \Leftrightarrow & -x-1-x+1=a \\ & \Leftrightarrow & -2x=a \\ & \Leftrightarrow & x=-\frac{a}{2} \end{array}$$

Or

$$\begin{array}{rcl} -\frac{a}{2} \leq -1 & \Leftrightarrow & \frac{a}{2} \geq 1 \\ & \Leftrightarrow & a \geq 2 \end{array}$$

donc $\frac{-a}{2}$ est solution si et seulement si $a \geq 2$.

— Cas 2 : $x \in [-1,1]$.

$$\begin{array}{rcl} (E) & \Leftrightarrow & x+1-x+1=a \\ & \Leftrightarrow & 2=a \end{array}$$

x est solution si et seulement si $a=2$.

— Cas 3 : $x \geq 1$.

$$\begin{array}{rcl} (E) & \Leftrightarrow & x+1+x-1=a \\ & \Leftrightarrow & 2x=a \\ & \Leftrightarrow & x=\frac{a}{2} \end{array}$$

Or

$$\frac{a}{2} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 2$$

$\frac{a}{2}$ est solution si et seulement si $a \geq 2$

En résumé, on a

— Si $a=2$, $S=[-1,1]$.

— Si $a<2$, pas de solution.

— Si $a>2$, $S=\{\frac{a}{2}, \frac{-a}{2}\}$.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Montrer que :

$$\exists m \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = m.$$

On pourra considérer l'ensemble $A=\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et se rappeler que toute partir non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Correction

On pose $A=\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$. Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, A est une partie de $\mathbb{N}$ et est non vide car contient u_0. A admet donc un plus petit élément que l'on note m. Par définition de A, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $u_N = m$. Soit $n \geq N$. Par décroissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_n \leq u_N$. Or $u_n \in A$. Par minimalité de u_N, on a $u_n \geq u_N$. Par conséquent, on a

$$\boxed{\forall n \geq N, u_n = u_N.}$$

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On considère les deux propositions suivantes :

1. $P_1 : \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
2. $P_2 : \forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leq M$.

Déterminer la valeur de vérité de chacune de ces propositions et justifier.

Correction

La proposition P_1 peut être fausse, il suffit de considérer la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n.$$

La proposition P_2 est vraie. En effet :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_n \leq u_n + 7777.$$

Il suffit donc de poser $M = u_n + 7777$.

Donc P_2 est bien vérifiée.