Devoir surveillé 2 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos\left(3k\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

1. Rappeler sans démonstration la formule $\cos(a+b)$ où a et b sont des réels.
2. En déduire une expression factorisée de S_n.
3. Résoudre l'équation d'inconnue réelle θ de paramètre entier naturel n

$$S_n(\theta) = 0.$$

Exercice 2. On définit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Déterminer l'application réciproque de f.

Exercice 3. Pour tout $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ on définit

$$f_{a,b} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & ax + by. \end{array}$$

1. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur a et b pour que $f_{a,b}$ soit surjective.
2. Peut-on trouver a et b réels pour que $f_{a,b}$ soit injective ? Justifier.

Exercice 4. On pose $z = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{39}$.

1. Déterminer une écriture algébrique de z.
2. Déterminer une écriture exponentielle, on donnera un argument $\theta \in]-\pi, \pi]$.
3. En déduire la valeur $\cos(\theta)$.

Exercice 5. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^{n} k^k, Q_n = \prod_{k=1}^{n} k!, R_n = \prod_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$.

Déterminer une relation entre P_n, Q_n, R_n.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$.

Problème

Dans ce problème, on cherche à déterminer diverses identités remarquables liés aux coefficients binomiaux. Certaines questions dépendent des autres.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. On pourra raisonner par récurrence sur n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on veut calculer $S_p(n) = \displaystyle\sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_p \leq n} 1$.
   (a) Calculer $S_1(n) = \displaystyle\sum_{i_1=0}^{n} 1$, $S_2(n) = \displaystyle\sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} 1$.
   (b) En remarquant que $S_3(n) = \sum_{i_3=0}^{n} S_2(i_3)$, calculer $S_3(n)$.
   (c) En remarquant que $S_p(n) = \sum_{i_p=0}^{n} S_{p-1}(i_p)$, démonter par récurrence que $S_p(n) = \binom{n+p}{p}$.
4. Soit n et m deux entiers strictement positifs, avec $m > n$. On pose

$$\begin{array}{rclcrcl} T_{m,n} & = & \sum_{k=0}^{n} k \frac{\binom{m-k-1}{m-n-1}}{\binom{m}{n}}, & & S_{m,n} & = & \sum_{k=0}^{n} k \binom{m-k-1}{m-n-1} \\ A_{m,n} & = & \sum_{k=0}^{n} \binom{m-k-1}{m-n-1}, & & B_{m,n} & = & \sum_{k=0}^{n} \binom{m-k}{m-n} \end{array}$$

   L'objectif des prochaines questions est de montrer que

$$T_{m,n} = \frac{n}{m-n+1}.$$

   (a) Justifier que $T_{m,n} = \frac{S_{m,n}}{\binom{m}{n}}$.
   (b) Montrer que $S_{m,n} = mA_{m,n} - (m-n)B_{m,n}$.
   (c) En déduire que $T_{m,n} = \frac{n}{m-n+1}$.