Devoir surveillé 2 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos\left(3k\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

1. Rappeler sans démonstration la formule $\cos(a+b)$ où a et b sont des réels.
2. En déduire une expression factorisée de S_n.
3. Résoudre l'équation d'inconnue réelle θ de paramètre entier naturel n

$$S_n(\theta) = 0.$$

Correction

1. On a $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
2. On a

$$\begin{array}{rcl} S_n(\theta) & = & \sum_{k=0}^{n} \cos\left(3k\theta + \frac{\pi}{4}\right). \\ & = & \sum_{k=0}^{n} (\cos(3k\theta)\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(3k\theta)\sin(\frac{\pi}{4})) \\ & = & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \cos(3k\theta) - \sin(3k\theta)\right) \end{array}$$

   - Cas 1 : il existe $k' \in \mathbb{Z}$, tel que $3\theta = 2k'\pi$.
     On a alors $S_n(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}(n+1)$.
   - Cas 2 : 3θ n'est pas un multiple de 2π. Calculons respectivement $\sum_{k=0}^{n} \cos(3k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(3k\theta)$. On a :

$$\begin{array}{rcll} \sum_{k=0}^{n} e^{3ik\theta} & = & \frac{1-e^{i3(n+1)\theta}}{1-e^{3i\theta}} & (e^{3i\theta} \neq 1) \\ & = & \frac{e^{3i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{\frac{3i\theta}{2}}} \frac{e^{-3i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{3i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{\frac{-3i\theta}{2}} - e^{\frac{3i\theta}{2}}} & \\ & = & e^{3i\frac{n}{2}\theta} \frac{\sin(-3\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{-3\theta}{2})} & \end{array}$$

     En prenant la partie réelle, on en déduit que

$$\begin{array}{rcl} \Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{3ik\theta}\right) & = & \sum_{k=0}^{n} \Re(e^{3ik\theta}) \\ & = & \sum_{k=0}^{n} \cos(3k\theta) \end{array}$$

     d'un côté. De l'autre,

$$\Re\left(e^{3i\frac{n}{2}\theta} \frac{\sin(-3\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{-3\theta}{2})}\right) = \cos(3\frac{n}{2}\theta)\frac{\sin(3\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{3\theta}{2})}$$

     Donc

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(3k\theta) = \cos(3\frac{n}{2}\theta)\frac{\sin(3\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{3\theta}{2})}$$

     De la même manière, en prenant la partie imaginaire, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(3k\theta) = \sin(3\frac{n}{2}\theta)\frac{\sin(3\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{3\theta}{2})}$$

Il en résulte que

$$S_n(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(3\frac{n}{2}\theta)\frac{\sin(3\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{3\theta}{2})} - \sin(3\frac{n}{2}\theta)\frac{\sin(3\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{3\theta}{2})}\right)$$

D'où

$$S_n(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sin(3\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{3\theta}{2})}\right)\left(\cos(3\frac{n}{2}\theta) - \sin(3\frac{n}{2}\theta)\right)$$

On a donc

$$S_n(\theta) = \left(\frac{\sin(3\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{3\theta}{2})}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3\frac{n}{2}\theta) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3\frac{n}{2}\theta)\right)$$

En utilisant $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, on retrouve

$$\boxed{S_n(\theta) = \left(\frac{\sin(3\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{3\theta}{2})}\right)\left(\cos(3\frac{n}{2}\theta + \frac{\pi}{4})\right)}.$$

3. Résolvons l'équation $S_n(\theta) = 0$. Constatons que si $\theta \in \{\frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$,
on a $S_n(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}(n+1) \neq 0$. Il nous suffit alors de déterminer l'ensemble des solutions pour $\theta \notin \{\frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.
Soit $\theta \notin \{\frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.
D'après la question 2,

$$S_n(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\sin(3\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{3\theta}{2})}\right)\left(\cos(3\frac{n}{2}\theta + \frac{\pi}{4})\right) = 0.$$

ce qui est équivalent à $\sin(3\frac{n+1}{2}\theta) = 0$ ou $\cos(3\frac{n}{2}\theta + \frac{\pi}{4}) = 0$.
Autrement dit, pour $n \geq 1$,

$$\exists k \in \mathbb{Z}, 3\frac{n+1}{2}\theta = k\pi, \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, 3\frac{n}{2}\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Ce qui signifie

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2k\pi}{3(n+1)}, \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{6n} + \frac{2k\pi}{3n} = \frac{(4k+1)\pi}{6n}$$

Reste à vérifier parmi les éléments trouvés ce qui ne sont pas de la forme $\frac{2k\pi}{3}$.
On a

$$\frac{2k'\pi}{3(n+1)} = \frac{2k\pi}{3} \Leftrightarrow k' = k(n+1).$$

et

$$\frac{(4k'+1)\pi}{6n} = \frac{2k\pi}{3} \Leftrightarrow 4k' = 4kn - 1$$

Ce qui est faux, puisqu'un entier ne peut à la fois être un multiple de 4 et ne pas l'être.

Par conséquent, pour $n \geq 1$,

$$\boxed{\mathcal{S}_n = \{\frac{2k\pi}{3(n+1)}, k \in \mathbb{Z}, k \notin (n+1)\mathbb{Z}\} \cup \{\frac{(4k+1)\pi}{6n}, k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Pour $n = 0$, on a

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$$

Exercice 2. On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \to & [1, +\infty[\\ & x & \mapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Déterminer l'application réciproque de f.

Correction

Soit $y \in [1, +\infty[$. On cherche à résoudre l'équation

$$\begin{array}{rcl} f(x) = y & \Leftrightarrow & \frac{e^x+e^{-x}}{2} = y \\ & \Leftrightarrow & e^{2x} + 1 = 2e^x y \end{array}$$

Posons $X = e^x$. L'équation est alors équivalente à

$$X^2 + 1 = 2Xy \quad \Leftrightarrow \quad X^2 - 2Xy + 1 = 0$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4y^2 - 4$. Or $y \geq 1$. Donc $\Delta \geq 0$. L'équation admet donc comme solutions

$$X_1 = y + \sqrt{y^2 - 1}, X_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}$$

L'équation initiale est donc équivalente à

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1} \text{ ou } x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}), x \geq 0.$$

Entre ces deux valeurs, on garde celle qui a un logarithme positif, autrement dit celle qui a une valeur plus grande que 1. On constate que X_1 et X_2 sont tous les deux positifs, car leur produit est égal à 1 et que leur somme est égal à $2y \geq 2 > 0$. De plus, X_1 est plus grand que 1 car somme d'un nombre plus grand que 1 avec un nombre positif. Par conséquent, $X_2 \leq 1$. Des deux solutions possibles, il y en a exactement une qui est solution. On a donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in [1, +\infty[f(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})}$$

La réciproque de l'application f est donc

$$\boxed{\begin{array}{lcl} g : [1, +\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ y & \mapsto & \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \end{array}.}$$

Exercice 3. Pour tout $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ on définit

$$f_{a,b} : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & ax + by. \end{array}$$

1. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur a et b pour que $f_{a,b}$ soit surjective.
2. Peut-on trouver a et b réels pour que $f_{a,b}$ soit injective ? Justifier.

Correction

1. Montrons que $f_{a,b}$ surjective est équivalent à $(a, b) \neq (0, 0)$.
   Montrons cette équivalence par double implication.
   — $(\Rightarrow)$: par la contraposée. Supposons que $(a, b) = (0, 0)$.
     Alors l'application $f_{0,0}$ est l'application nulle. 1 n'a donc pas d'antécédent par $f_{a,b}$. Donc elle n'est pas surjective.
   — $(\Leftarrow)$: on raisonne par disjonction de cas.
     — Cas 1 : $a \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{R}$. On a $f_{a,b}(\frac{z}{a}, 0) = z$. Donc z a bien un antécédent par $f_{a,b}$.
       $f_{a,b}$ est bien surjective.
     — Cas 2 : $a = 0, b \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{R}$. On a $f_{a,b}(0, \frac{z}{b}) = z$. Donc z a bien un antécédent par $f_{a,b}$.
       $f_{a,b}$ est bien surjective.
     Par disjonction de cas, on en déduit que $f_{a,b}$ est surjective.
2. Montrons par disjonction de cas que $f_{a,b}$ n'est jamais injective.
   — Cas 1 : $(a, b) = (0, 0)$. On a alors $f_{0,0}(0, 0) = f_{(0,0)}(1, 1) = 0$.
     Donc 0 a au moins deux antécédents par $f_{0,0}$. Donc f n'est pas injective.
   — Cas 2 : $(a, b) \neq (0, 0)$. On a $f_{0,0}(0, 0) = 0$ et $f_{a,b}((b, -a)) = 0$. Comme $(a, b) \neq (0, 0)$, il est clair que $(b, -a)$ aussi est différent de $(0, 0)$. Donc 0 a au moins deux antécédents. Par conséquent, f n'est pas injective.
   Par disjonction de cas, on en déduit que $f_{a,b}$ n'est jamais injective.

Exercice 4. On pose $z = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{39}$.

1. Déterminer une écriture algébrique de z.
2. Déterminer une écriture exponentielle, on donnera un argument $\theta \in]-\pi, \pi]$.
3. En déduire la valeur $\cos(\theta)$.

Correction

1. On pose $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = 1 - i$. On a
$$z_1 = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}), z_2 = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}).$$
Donc
$$z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}, z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}.$$
On a donc $z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39} = \sqrt{2}^{39}\frac{e^{\frac{39i\pi}{6}}}{e^{\frac{-39i\pi}{4}}}$. D'où
$$z = \sqrt{2}^{39}\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}}$$
donc $z = \sqrt{2}^{39}e^{\frac{-i\pi}{4}} = 2^{19} - 2^{19}i$
2. Précédemment, on a déterminé une écriture exponentielle : $\sqrt{2}^{39}e^{\frac{-i\pi}{4}}$.
3. On a $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 5. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k, Q_n = \prod_{k=1}^{n} k!, R_n = \prod_{k=1}^{n}\binom{n}{k}$.

Déterminer une relation entre P_n, Q_n, R_n.

Correction

On a :
$$R_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
Donc
$$R_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(n-k+j)\right)$$

En posant $j' = n-k+j$, on a $\prod_{j=1}^{k}(n-k+j) = \prod_{j'=n-k+1}^{n} j'$. On a donc $n-k+1 \leq j' \Leftrightarrow n-j'+1 \leq k$. En intervertissant le produit, on obtient
$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{j'=n-k+1}^{n}(j') = \prod_{j'=1}^{n}\prod_{k=n-j'+1}^{n} j' = \prod_{j'=1}^{n}(j')^{j'} = P_n.$$
Donc
$$R_n = \frac{P_n}{Q_n}.$$
On peut également représenter le produit $\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(n-k+j)\right)$ graphiquement :

$$\begin{array}{ccccc}
n & & & & \\
(n-1) & n & & & \\
(n-2) & (n-1) & n & & \\
\cdots & \cdots & & n & \\
1 & 2\cdots & & & n
\end{array}$$

On constate alors que les éléments sur une diagonale fixée sont identiques. Il suffit alors de compter le nombre d'éléments de la i^{e} diagonale, en considérant que la première diagonale est 1. Sur la i^{e} diagonale il y a donc i éléments. Ce produit est donc égal à $\prod_{k=1}^{n} k^k = P_n$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}$.

Correction

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. En posant $k'=2n+1-k$, on a
$$0\leq k\leq n\Leftrightarrow 2n+1\geq 2n+1-k\geq n+1\Leftrightarrow 2n+1\geq k'\geq n+1.$$
Donc
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{2n+1-k}.$$
Par symétrie des coefficients binomiaux, on en déduit que
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}.$$
2. Posons $A_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$. D'après la question 1,
$$2A_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}.$$
D'après la formule du binôme de Newton, on obtient :
$$2A_n=2^{2n+1}.$$
Donc $\boxed{A_n=2^{2n}}$.

Problème

Dans ce problème, on cherche à déterminer diverses identités remarquables liés aux coefficients binomiaux. Certaines questions dépendent des autres.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Simplifier $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}$.
2. Soit $p\in\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$. On pourra raisonner par récurrence sur n.
3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on veut calculer $\displaystyle S_p(n)=\sum_{0\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_p\leq n}1$.
   (a) Calculer $\displaystyle S_1(n)=\sum_{i_1=0}^{n}1$, $\displaystyle S_2(n)=\sum_{0\leq i_1\leq i_2\leq n}1$.
   (b) En remarquant que $S_3(n)=\sum_{i_3=0}^{n}S_2(i_3)$, calculer $S_3(n)$.
   (c) En remarquant que $S_p(n)=\sum_{i_p=0}^{n}S_{p-1}(i_p)$, démonter par récurrence que $S_p(n)=\binom{n+p}{p}$.
4. Soit n et m deux entiers strictement positifs, avec $m>n$. On pose
$$\begin{aligned} T_{m,n} &= \sum_{k=0}^{n}k\frac{\binom{m-k-1}{m-n-1}}{\binom{m}{n}}, & S_{m,n} &= \sum_{k=0}^{n}k\binom{m-k-1}{m-n-1}\\ A_{m,n} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{m-k-1}{m-n-1}, & B_{m,n} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{m-k}{m-n}\end{aligned}$$
L'objectif des prochaines questions est de montrer que
$$T_{m,n}=\frac{n}{m-n+1}.$$

(a) Justifier que $T_{m,n} = \frac{S_{m,n}}{\binom{m}{n}}$.

(b) Montrer que $S_{m,n} = mA_{m,n} - (m-n)B_{m,n}$.

(c) En déduire que $T_{m,n} = \frac{n}{m-n+1}$.

Correction

1. Posons $\Sigma_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}$.
En intervertissant les deux sommes, on obtient

$$\Sigma_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}$$

D'après la formule du binôme,

$$\Sigma_n = \sum_{j=0}^{n} 2^j. \tag{1}$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $2 \neq 1$. Donc

$$\Sigma_n = 2^{n+1} - 1.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i} = 2^{n+1} - 1}$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) : \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Montrons par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
— Initialisation : pour $n = 0$.
  — Cas 1 : $p = 0$. dans ce cas, $\sum_{k=0}^{0}\binom{k}{0} = 1$ et $\binom{1}{1} = 1$. donc $P(0)$ est vraie.
  — Cas 2 : $p \geq 1$. dans ce cas $\sum_{k=0}^{0}\binom{k}{p} = \binom{0}{p} = 0$ car $p \geq 1$
  et $\binom{0+1}{p+1} = 0$ car $p + 1 > 1$. Donc $P(0)$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. On a

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}$$

Or d'après $P(n)$,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}$$

On obtient alors en appliquant la formule du triangle de Pascal,

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{p} = \binom{n+1+1}{p+1} = \binom{n+2}{p+1}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$$

3. (a) On a

$$S_1(n) = \sum_{i=0}^{n} 1 = (n+1) = \boxed{\binom{n+1}{1}}$$

et

$$\begin{array}{rcll} S_2(n) & = & \sum_{i_2=0}^{n} \sum_{i_1=0}^{i_2} 1 & \\ & = & \sum_{i_2=0}^{n} (i_2+1) & \\ & = & \sum_{k'=1}^{n+1} (k') & (k' = i_2+1) \\ & = & \frac{(n+1)(n+2)}{2} & \\ & = & \frac{(n+2)!}{2!n!} & \\ & = & \boxed{\binom{n+2}{2}} & \end{array}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_3(n) = \sum_{i_3=0}^{n} \left(\sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3} 1 \right).$$

Autrement dit,

$$S_3(n) = \sum_{i_3=0}^{n} S_2(i_3).$$

On a donc, d'après la question 3a,

$$S_3(n) = \sum_{i_3=0}^{n} \binom{i_3+2}{2}.$$

En posant $k = i_3 + 2$, on obtient

$$S_3(n) = \sum_{k=2}^{n+2} \binom{k}{2}.$$

Comme $\binom{0}{2} = \binom{1}{2} = 0$, on a

$$S_3(n) = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{k}{2}.$$

On obtient, d'après la question 2

$$\boxed{S_3(n) = \binom{n+3}{3}}$$

(c) Pour tout $p \geq 1$, on pose

$$P(p) : \forall n \in \mathbb{N}, S_p(n) = \binom{n+p}{p}$$

— Initialisation : pour $p = 1$, on a d'après la question 3a, $S_1(n) = \binom{n+1}{1}$.
— Hérédité : soit $p \geq 1$. On suppose que $P(p)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_{p+1}(n) = \sum_{i_{p+1}=0}^{n} \sum_{0 \geq i_1 \geq \cdots \geq i_p \geq i_{p+1}} 1.$$

D'où

$$S_{p+1}(n) = \sum_{i_{p+1}=0}^{n} S_p(i_{p+1}).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$S_{p+1}(n) = \sum_{i_{p+1}=0}^{n} \binom{i_{p+1}}{p}$$

D'après la question 2, on en déduit que

$$S_{p+1}(n) = \binom{n+1}{p+1}.$$

$P(p+1)$ est donc vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que

$$\forall p \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, S_p(n) = \binom{n+p}{p}.$$

4. Soit n et m deux entiers strictement positifs, avec $m > n$. On pose

$$\begin{array}{rclrcl} T_{m,n} & = & \sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{m-k-1}{m-n-1}}{\binom{m}{n}}, & S_{m,n} & = & \sum_{k=0}^{n} k\binom{m-k-1}{m-n-1} \\ A_{m,n} & = & \sum_{k=0}^{n} \binom{m-k-1}{m-n-1}, & B_{m,n} & = & \sum_{k=0}^{n} \binom{m-k}{m-n} \end{array}$$

L'objectif des prochaines questions est de montrer que

$$T_{m,n} = \frac{n}{m-n+1}.$$

(a) On a

$$\begin{array}{rcl} T_{m,n} & = & \sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{m-k-1}{m-n-1}}{\binom{m}{n}} \\ & = & \frac{1}{\binom{m}{n}}\left(\sum_{k=0}^{n} k\binom{m-k-1}{m-n-1}\right) \end{array}$$

par linéarité de la somme. D'où

$$T_{m,n} = \frac{S_{m,n}}{\binom{m}{n}}.$$

(b) On a

$$\begin{array}{rcl} S_{m,n} & = & m\sum_{k=0}^{n} k\binom{m-k-1}{m-n-1} \\ & = & m\sum_{k=0}^{n}(k-m+m)\binom{m-k-1}{m-n-1} \\ & = & m\sum_{k=0}^{n} m\binom{m-k-1}{m-n-1} - \sum_{k=0}^{n}(m-k)\binom{m-k-1}{m-n-1} \end{array}$$

En appliquant la formule du pion, à la deuxième somme, on obtient

$$S_{m,n} = m\sum_{k=0}^{n}\binom{m-k-1}{m-n-1} - \sum_{k=0}^{n}(m-n)\binom{m-k}{m-n}$$

D'où

$$\boxed{S_{m,n} = mA_{m,n} - (m-n)B_{m,n}.} \qquad (2)$$

(c) En posant $k' = m-k-1$, on obtient

$$A_{m,n} = \sum_{k'=m-n-1}^{m-1}\binom{k'}{m-n-1}.$$

Pour $k' < m-n-1$, $\binom{k'}{m-n-1} = 0$. Donc, d'après la question 2,

$$A_{m,n} = \sum_{k'=0}^{m-1}\binom{k'}{m-n-1} = \binom{m}{m-n}$$

de la même manière, en posant $k' = m-k$, on obtient

$$B_{m,n} = \sum_{k'=m-n}^{m}\binom{k'}{m-n}.$$

Pour $k' < m-n$, $\binom{k'}{m-n} = 0$. Donc, d'après la question 2,

$$B_{m,n} = \sum_{k'=0}^{m}\binom{k'}{m-n} = \binom{m+1}{m-n+1}.$$

En substituant ces valeurs dans l'égalité (2), on obtient

$$S_{m,n} = m\binom{m}{m-n} - (m-n)\binom{m+1}{m-n+1}$$

Or $m\left(\binom{m}{m-n}-\binom{m+1}{m-n+1}\right)=-m\binom{m}{m-n+1}$ (Triangle de Pascal). Donc

$$S_{m,n}=-m\binom{m}{m-n+1}+n\binom{m+1}{m-n+1}.$$

Par symétrie des coefficients binomiaux,

$$S_{m,n}=-m\binom{m}{n-1}+n\binom{m+1}{n}$$

Donc

$$S_{m,n}=-m\binom{m}{n-1}+\frac{n(m+1)}{n}\binom{m}{n-1}$$

D'où

$$S_{m,n}=\binom{m}{n-1}$$

Donc

$$T_{m,n}=\frac{\frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!}}{\frac{m!}{n!(m-n)!}}$$

D'où

$$T_{m,n}=\frac{n!(m-n)!}{(n-1)!(m-n+1)!}$$

Donc

$$\boxed{T_{m,n}=\frac{n}{m-n+1}.}$$