Devoir surveillé 3 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on rappelle qu'une permutation de taille k est une $k-$liste sans répétition des éléments de l'ensemble $\{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{S}_{2n}$ l'ensemble des permutations de taille $2n$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{2n-1}) \in \mathfrak{S}_{2n}$. On dit que σ est une involution sans point fixe si :

- $\forall i \in \{0, 1, \cdots, 2n-1\}, \sigma_i \neq i$;
- $\forall (i, j) \in \{0, 1, \cdots, 2n-1\}^2, \sigma_i = j \Leftrightarrow \sigma_j = i$.

Par exemple, $\sigma = (3, 2, 1, 0)$ est une involution sans point fixe. En effet, on a :

$$\sigma_0 = 3 \neq 0,\ \sigma_3 = 0 \neq 3 \quad \text{et} \quad \sigma_1 = 2 \neq 1,\ \sigma_2 = 1 \neq 2.$$

Il est commode de représenter les involutions sans point fixe par des ensembles de parties à deux éléments. Pour l'exemple précédent, cela donne $\{\{0, 3\}, \{1, 2\}\}$. Alors que $\{\{0, 2\}, \{1, 5\}, \{3, 4\}\}$ représente l'exemple $\sigma = (2, 5, 0, 4, 3, 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{I}_n$ l'ensemble des involutions sans point fixe de $\mathfrak{S}_{2n}$ et I_n son cardinal. Par convention, $I_0 = 1$.

Les parties INFO et MATH sont indépendantes.

INFO

En Python, il est possible de représenter une permutation par une liste d'entiers. Par exemple, la permutation σ donnée par $(2, 5, 0, 4, 3, 1)$ est représentée par la liste $[2, 5, 0, 4, 3, 1]$.

On considère le code suivant :

```
def nombreOccurrence(L) :
    M=[0 for i in range(len(L))]
    for i in range(len(L)) :
        M[L[i]]=M[L[i]]+1
    return M
```

1. (a) Quelle est la valeur de `nombreOccurrence([0,0,2,1,3,4,2,3,2])` ?
   (b) Quelle est la valeur de `nombreOccurrence(L)` où L est une liste sans répétition de $\{0, \cdots, n-1\}$ à n éléments ?
   (c) En déduire une fonction `est_permutation(L)` qui retourne `True` si la liste `L` est une permutation et `False` sinon. On supposera que L est une liste d'éléments de $\{0, \cdots, l-1\}$ où l est la longueur de L.
2. On considère le code suivant :

```
def est_involution_sans_pt_fixe(L) :
    l=len(L)
    if l % 2 == 0 and est_permutation(L) :
        for i in range(l) :
            if L[i]==i :
                return False
        for i in range(l) :
            for j in range(i+1,l) :
                if L[i]!=j or L[j]!=i :
                    return False
                else :
                    return True
    return False
```

   (a) Montrer qu'il existe une l-liste L sans répétition de $\{0, \cdots, l-1\}$ qui n'est pas une involution sans point fixe mais où la valeur de retour de `est_involution_sans_pt_fixe(L)` est `True`.

(b) Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie `True` si la liste L est une involution sans point fixe et `False` sinon.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$I_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (2n+1)I_n.$$

Écrire une fonction `I(n)` qui retourne la valeur de I_n.

MATH

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_{2n}$.
2. Déterminer toutes les involutions sans points fixe de $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_6$.
3. Soit $n \geq 0$. Pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, 2n\}$, on pose $A_i = \{\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{2n+1}) \in \mathfrak{I}_{n+1} \,|\, \sigma_{2n+1} = i\}$.
   (a) Soient i et j deux éléments différents de $\{0, 1, \cdots, 2n\}$. Montrer que $A_i \cap A_j = \emptyset$.
   (b) Montrer que $\cup_{i=0}^{2n} A_i = \mathfrak{I}_{n+1}$.
   (c) Soit $i \in \{0, 1, \cdots, 2n\}$. Montrer que $\text{Card}(A_i) = I_n$.
   (d) En déduire que $I_{n+1} = (2n+1)I_n$.
4. En déduire une expression de I_n en fonction de n. On écrira le résultat comme un quotient faisant intervenir des factorielles et une suite géométrique.

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & a_{n+2} = e^2 a_{n+1}^2 a_n^3 \end{cases}$$

Les parties MATH et INFO sont indépendantes.

INFO

1. Écrire une fonction `a(n)` qui retourne la valeur de a_n. On supposera que la variable `e` est définie et contient la valeur e.
2. Écrire une fonction `premier_rang(M)` qui retourne le premier entier n tel que $a_n > M$. On pourra utiliser la fonction de la question 1.

MATH

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \ln(a_n)$. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et déterminer une relation entre b_{n+2}, b_{n+1}, b_n.
3. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$\alpha = 5\alpha + 2.$$
4. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = b_n - \alpha$$
est une suite vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+2} = 2c_{n+1} + 3c_n.$$
5. En déduire une expression de c_n, b_n, a_n en fonction de n.

DS n° 3 de mathématiques

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Problème

Pour faire patienter des étudiants de BCPST jusqu'~~au prochain DS~~ aux vacances, on souhaite réaliser un calendrier de l'Avent. Pour cela, on dispose d'une boîte cartonnée dans laquelle sont prédécoupées des fenêtres numérotées (qui seront ouvertes progressivement, une par jour). Derrière chaque fenêtre, on cache une des surprises suivantes : un bonbon au chocolat (noté B), une truffe au chocolat (notée T), une pâte de fruit (notée P), une figurine en plastique (notée F), ou ~~un exo de maths~~ un message d'encouragement (noté M). On dispose d'autant de surprises de chaque type que l'on veut et on peut remplir le calendrier de toutes les façons possibles, sauf placer deux chocolats deux jours de suite afin d'éviter les indigestions.

Ce problème propose de dénombrer tous les calendriers possibles. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre total de calendriers de n cases, c_n le nombre d'entre eux dont la n-ième case cache un bonbon ou une truffe au chocolat (donc B ou T) et d_n le nombre d'entre eux dont la n-ième case ne cache ni un bonbon ni une truffe au chocolat (donc P ou F ou M).

1. (a) Déterminer u_1, c_1 et d_1.
   (b) Déterminer u_2, c_2 et d_2.
   (c) Justifier que $u_3 = 93$, $c_3 = 30$ et $d_3 = 63$.
2. Pour cette question, on fixe un entier $n \geqslant 1$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de c_n et d_n.
   (b) Justifier que $u_{n+1} = 3c_n + 5d_n$.
   (c) Exprimer c_{n+1} et d_{n+1} en fonction de c_n et d_n.
3. À l'aide des résultats précédents, déterminer deux constantes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telles que
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$
4. Exprimer u_n en fonction de l'entier $n \geqslant 1$. Puis écrire cette expression sous la forme :
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{x + y\sqrt{33}}{2}\left(\frac{x' + y'\sqrt{33}}{2}\right)^n + \frac{x - y\sqrt{33}}{2}\left(\frac{x' - y'\sqrt{33}}{2}\right)^n$$
   où $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ sont des constantes à déterminer.
5. À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell + \frac{7}{3} \times \sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell+1}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell\right).$$

Exercice 1

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'application :

$$\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\lambda x + y, \lambda y + x).$$

On fixe $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ dans tout l'exercice.

1. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système suivant d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\begin{cases} \lambda x + y = a \\ x + \lambda y = b \end{cases}.$$
On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de λ puis, si besoin, les sous-cas $a = b$ ou $a = -b$.
   (b) Justifier que si $|\lambda| \neq 1$ alors $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
   (c) Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ_λ dans les cas $\lambda = -1$ et $\lambda = 1$. Dans le cas de réponses négatives, on les justifiera par des contre-exemples.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\varphi_{\lambda'}(\varphi_\lambda(x, y))$.

On rappelle que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on définit : $c \times (a, b) = (ca, cb)$.

3. On suppose que $\lambda + \lambda' \neq 0$ dans cette question.
   (a) Montrer que :
$$\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda = c \times \varphi_\mu$$
où $(c, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes à exprimer en fonction de λ et λ'.
   (b) Que peut-on en déduire pour $\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'}$? Pourquoi ce résultat est-il surprenant ?
4. On suppose que $\lambda + \lambda' = 0$ dans cette question.
   (a) Montrer que :
$$\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda = d \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$$
où $d \in \mathbb{R}$ est une constante à exprimer en fonction de λ.
   (b) On suppose que $d \neq 0$. Calculer $\varphi_\lambda \circ \left(\frac{1}{d} \times \varphi_{\lambda'}\right)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2

On considère des grilles rectangulaires de mots croisés ayant 6 lignes, 7 colonnes et 10 cases noires (toutes les autres cases sont vides). On pourra répondre aux questions suivantes sans simplifier les résultats.

1. Combien peut-on former de telles grilles différentes ?
2. Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont :
   (a) aucune case noire dans un coin ?
   (b) au plus deux cases noires dans des coins ?
   (c) au moins une case noire dans la première ligne ?
   (d) une seule case noire dans la dernière ligne et une seule case noire dans la première colonne ?
3. Combien y a-t-il de façons différentes de remplir une telle grille (avec l'alphabet latin) ?

Exercice 3

On considère la fonction réelle $f : \theta \mapsto 2\sin(\theta/2) + 3\sin(\theta/3)$.

1. Justifier qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0, 6\pi]$ pour en déduire son étude sur $\mathbb{R}$.
2. Dresser le tableau des variations de f sur $[0, 6\pi]$ sans calculer la valeur de chaque extremum.
3. En déduire l'étude de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
4. (a) Montrer que le maximum de f sur $[0, 6\pi]$ vaut $5\sin(2\pi/5)$.
   (b) Exprimer le minimum de f sur $[0, 6\pi]$ en fonction de $\sin(\pi/5)$.
   (c) Que valent les extrema de f sur $\mathbb{R}$?
5. Déterminer l'image directe par f de chaque ensemble suivant :
$$I_1 =]0, 3\pi[, \quad I_2 =]2\pi, 4\pi[, \quad I_3 = [-\pi, \pi] \quad \text{et} \quad I_4 = [100\pi, 200\pi].$$
6. Justifier que la restriction de f à $[2\pi, 3\pi]$ réalise une bijection vers un ensemble à déterminer.