Devoir surveillé 3 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on rappelle qu'une permutation de taille k est une $k-$liste sans répétition des éléments de l'ensemble $\{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{S}_{2n}$ l'ensemble des permutations de taille $2n$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{2n-1}) \in \mathfrak{S}_{2n}$. On dit que σ est une involution sans point fixe si :
— $\forall i \in \{0, 1, \cdots, 2n-1\}, \sigma_i \neq i$;
— $\forall (i, j) \in \{0, 1, \cdots, 2n-1\}^2, \sigma_i = j \Leftrightarrow \sigma_j = i$.

Par exemple, $\sigma = (3, 2, 1, 0)$ est une involution sans point fixe. En effet, on a :

$$\sigma_0 = 3 \neq 0,\ \sigma_3 = 0 \neq 3 \quad \text{et} \quad \sigma_1 = 2 \neq 1,\ \sigma_2 = 1 \neq 2.$$

Il est commode de représenter les involutions sans point fixe par des ensembles de parties à deux éléments. Pour l'exemple précédent, cela donne $\{\{0, 3\}, \{1, 2\}\}$. Alors que $\{\{0, 2\}, \{1, 5\}, \{3, 4\}\}$ représente l'exemple $\sigma = (2, 5, 0, 4, 3, 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{I}_n$ l'ensemble des involutions sans point fixe de $\mathfrak{S}_{2n}$ et I_n son cardinal. Par convention, $I_0 = 1$.

Les parties INFO et MATH sont indépendantes.

INFO

En Python, il est possible de représenter une permutation par une liste d'entiers. Par exemple, la permutation σ donnée par $(2, 5, 0, 4, 3, 1)$ est représentée par la liste $[2, 5, 0, 4, 3, 1]$.

On considère le code suivant :

```
def nombreOccurrence(L) :
    M=[0 for i in range(len(L))]
    for i in range(len(L)) :
        M[L[i]]=M[L[i]]+1
    return M
```

1. (a) Quelle est la valeur de `nombreOccurrence([0,0,2,1,3,4,2,3,2])` ?
   (b) Quelle est la valeur de `nombreOccurrence(L)` où L est une liste sans répétition de $\{0, \cdots, n-1\}$ à n éléments ?
   (c) En déduire une fonction `est_permutation(L)` qui retourne `True` si la liste `L` est une permutation et `False` sinon. On supposera que L est une liste d'éléments de $\{0, \cdots, l-1\}$ où l est la longueur de L.
2. On considère le code suivant :

```
def est_involution_sans_pt_fixe(L) :
    n=len(L)
    if n % 2 == 0 and est_permutation(L) :
        for i in range(n) :
            if L[i]==i :
                return False
        for i in range(n) :
            for j in range(i+1,n) :
                if L[i]!=j or L[j]!=i :
                    return False
                else :
                    return True
    return False
```

   (a) Montrer qu'il existe une l-liste L sans répétition de $\{0, \cdots, l-1\}$ qui n'est pas une involution sans point fixe mais où la valeur de retour de `est_involution_sans_pt_fixe(L)` est `True`.

(b) Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie `True` si la liste L est une involution sans point fixe et `False` sinon.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$I_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (2n+1)I_n.$$

Écrire une fonction `I(n)` qui retourne la valeur de I_n.

Correction

1. (a) La valeur de retour est $\boxed{[2,1,3,2,1,0,0,0,0]}$.

(b) Pour une telle liste, on obtient $\boxed{[1,1\cdots,1]}$.

(c)
```
def est_permutation(L) :
    n=len(L)
    M=[0 for i in range(n)]
    for i in range(n) :
        M[L[i]]=M[L[i]]+1
    T=[1 for i in range(n)]
    if T==M :
        return True
    else :
        return False
```

2. On considère le code suivant :

```
def est_involution_sans_pt_fixe(L) :
    n=len(L)
    if n % 2 == 0 and est_permutation(L) :
        for i in range(n) :
            if L[i]==i :
                return False
        for i in range(n) :
            for j in range(i+1,n) :
                if L[i]!=j or L[j]!=i :
                    return False
                else :
                    return True
    return False
```

(a) En prenant $L = [1,0,3,4,5,2]$, . Donc dans le passage de la boucle indexée par j, la fonction passe par le return True. Donc la valeur de retour est `True`. Mais ce n'est pas une involution. En effet, $L[2] = 3$ mais $L[3] = 4$, ce qui est différents de 2.
On remarque que l'on peut trouver des involutions sans point fixe pour laquelle la valeur de retour est `False`. Par exemple, si on prend $L = [3,2,1,0]$ on aura comme valeur de retour `False`. En effet, $L[0] = 3$ et est donc différent de 1 qui est le premier j considéré.

(b)
```
def est_involution_sans_pt_fixe(L) :
    n=len(L)
    if n % 2 == 0 and est_permutation(L) :
        for i in range(n) :
            if L[i]==i :
                return False
        for i in range(n) :
            for j in range(i+1,n) :
                if L[i]==j and L[j]!=i :
                    return False
        return True
    return False
```

3.
```
def I(n) :
    u=1
    for i in range(n) :
        u=(2*i+1)*u
    return u
```

MATH

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_{2n}$.
2. Déterminer toutes les involutions sans points fixe de $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_6$.
3. Soit $n \geq 0$. Pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, 2n\}$, on pose $A_i = \{\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{2n+1}) \in \mathfrak{I}_{n+1} \mid \sigma_{2n+1} = i\}$.
   (a) Soient i et j deux éléments différents de $\{0, 1, \cdots, 2n\}$. Montrer que $A_i \cap A_j = \emptyset$.
   (b) Montrer que $\cup_{i=0}^{2n} A_i = \mathfrak{I}_{n+1}$.
   (c) Soit $i \in \{0, 1, \cdots, 2n\}$. Montrer que $\mathrm{Card}(A_i) = I_n$.
   (d) En déduire que $I_{n+1} = (2n+1)I_n$.
4. En déduire une expression de I_n en fonction de n. On écrira le résultat comme un quotient faisant intervenir des factorielles et une suite géométrique.

Correction

1. Le nombre de permutations de taille $2n$ est égal à $\boxed{2n!}$.
2. — Pour $n = 2$, on a $\{\{0, 1\}\}$.
   — Pour $n = 4$, on a $\{\{0, 1\}, \{2, 3\}\}, \{\{0, 2\}, \{1, 3\}\}, \{\{0, 3\}, \{1, 2\}\}$.
   — Pour $n = 6$, on a

$$\begin{array}{lll}\{\{0,1\},\{2,3\},\{4,5\}\}, & \{\{0,1\},\{2,4\},\{3,5\}\}, & \{\{0,1\},\{2,5\},\{3,4\}\}, \\ \{\{0,2\},\{1,3\},\{4,5\}\}, & \{\{0,2\},\{1,4\},\{3,5\}\}, & \{\{0,2\},\{1,5\},\{3,4\}\}, \\ \{\{0,3\},\{1,2\},\{4,5\}\}, & \{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\}\}, & \{\{0,3\},\{1,5\},\{2,4\}\}, \\ \{\{0,4\},\{1,2\},\{3,5\}\}, & \{\{0,4\},\{1,3\},\{2,5\}\}, & \{\{0,4\},\{1,5\},\{2,3\}\}, \\ \{\{0,5\},\{1,2\},\{3,4\}\}, & \{\{0,5\},\{1,3\},\{2,4\}\}, & \{\{0,5\},\{1,4\},\{2,3\}\}.\end{array}$$

3. Soit $n \geq 0$. Pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, 2n\}$, on pose $A_i = \{\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{2n+1}) \in \mathfrak{I}_{n+1} \mid \sigma_{2n+1} = i\}$.
   (a) Soient i et j deux éléments différents de $\{0, 1, \cdots, 2n\}$. Montrer que $A_i \cap A_j = \emptyset$. Soit i et j deux éléments de $\{0, 1, \cdots, 2n\}$. On suppose que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Il existe donc $\sigma \in A_i \cap A_j$. Par définition de A_i et A_j, on en déduit que $\sigma_{2n+1} = i$ et $\sigma_{2n+1} = j$. Donc $i = j$.
   Par la contraposée, on en déduit que si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.
   (b) Pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, 2n\}, A_i \subset \mathfrak{I}_{n+1}$. Donc $\cup_{i=0}^{2n} A_i \subset \mathfrak{I}_{n+1}$.
   Soit $\sigma \in \mathfrak{I}_{n+1}$. Posons $j = \sigma_{2n+1}$. σ étant une involution sans point fixe, $j \in \{0, 1, \cdots, 2n\}$ et $\sigma \in \mathfrak{I}_{n+1}$ donc $\sigma \in A_j$. Par conséquent, $\sigma \in \cup_{i=0}^{2n} A_i$ et donc $\mathfrak{I}_{n+1} \subset \cup_{i=0}^{2n} A_i$.
   D'après le principe de double inclusion, $\boxed{\mathfrak{I}_{n+1} = \cup_{i=0}^{2n} A_i}$.
   (c) Soit $i \in \{0, \cdots, 2n\}$. Construisons une bijection ϕ de I_n vers A_i. Soit $\sigma \in I_n$. $\phi(\sigma)$ se construit de cette manière. En utilisant la notation sous forme d'ensemble, on a $\sigma = \{\{a_0, a_1\}, \cdots, \{a_{2n-2}, a_{2n-1}\}\}$. Pour tout $j \in \{0, \cdots, 2n-2\}$ tel que $a_j \geq i$, on rajoute 1. Puis on rajoute à σ l'ensemble $\{i, 2n+1\}$. On obtient alors un élément de A_i. Réciproquement, notons ψ la réciproque de ϕ. Étant donné un élément τ de A_i, pour construire $\psi(\tau)$, on procède de la manière suivante.
      i. on enlève à τ le sous-ensemble contenant $2n+1$.
      ii. on enlève 1 à toutes les valeurs strictement plus grande que i.

   Par exemple, $\psi(\{\{0, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 5\}\}) = \{\{0, 3\}, \{1, 2\}\}$
   A_i et $\mathfrak{I}_n$ étant en bijection, on en déduit qu'ils sont de même cardinal.
   Autre rédaction :
   Soit $i \in \{0, \cdots, 2n\}$. Les éléments de A_i sont exactement ceux où on a regroupé i et $2n+1$ ensembles. Il reste donc à regrouper par deux les $2n$ éléments de $E = \{0, 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, 2n\}$. Or le nombre de façons de regrouper deux à deux les $2n$ éléments de $F = \{0, 1, \cdots, 2n-1\}$ est le nombre d'involutions sans point fixe de F. En remplaçant respectivement $i, i+1, \cdots, 2n-1$ par $i+1, i+2, \cdots 2n$ dans les involutions sans point fixe de F, on construit une bijection entre les involutions sans point fixe de F et les façons de regrouper les éléments de E deux par deux. Ces deux ensembles ont donc le même cardinal. Donc $\mathrm{Card}(A_i) = I_n$.
   (d) Les A_i formant une partition de $\mathfrak{I}_{n+1}$, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{2n} \mathrm{Card}(A_k) = I_{n+1}.$$

   Or, pour tout $k \in \{0, \cdots, 2n\}, \mathrm{Card}(A_k) = I_n$. Donc

$$\boxed{I_{n+1} = (2n+1)I_n.}$$

4. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = (2n-1)(2n-3)\cdots 1 = \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$.
   — Pour $n = 0$, $I_0 = 1$ donc la propriété est vraie.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $I_n = \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$. Montrons que $I_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)$.
   On a $I_{n+1} = (2n+1)I_n$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient alors
   $$I_{n+1} = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \prod_{k=1}^{n+1}(2k-1).$$
   Donc la propriété est héréditaire.
   — Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc :
   $$I_n = \frac{(2n-1)!}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}.$$
   D'où
   $$\boxed{I_n = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}}$$

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par
$$\begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & a_{n+2} = e^2 a_{n+1}^2 a_n^3 \end{cases}$$
Les parties MATH et INFO sont indépendantes.

INFO

1. Écrire une fonction `a(n)` qui retourne la valeur de a_n. On supposera que la variable `e` est définie et contient la valeur e.
2. Écrire une fonction `premier_rang(M)` qui retourne le premier entier n tel que $a_n > M$. On pourra utiliser la fonction de la question 1.

Correction

1.
```
def a(n) :
    a0=1
    a1=2
    for i in range(n) :
        a2=(e**2)*(a1**2)*(a0**3)
        a0=a1
        a1=a2
    return a0
```

2.
```
def premier_rang(M) :
    n=0
    while (a(n)<=M) :
        n=n+1
    return n
```

MATH

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \ln(a_n)$. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et déterminer une relation entre b_{n+2}, b_{n+1}, b_n.
3. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\alpha = 5\alpha + 2.$$
4. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = b_n - \alpha$$
   est une suite vérifiant
   $$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+2} = 2c_{n+1} + 3c_n.$$

5. En déduire une expression de c_n, b_n, a_n en fonction de n.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : a_n > 0, a_{n+1} > 0$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
   — Initialisation : $a_0 = 1 > 0, a_1 = 2 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
   — Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. D'après $P(n)$, $a_{n+1} > 0$. On a $a_{n+2} = e^2 a_{n+1}^2 a_n^3$. Comme $a_{n+1} > 0$ et $a_n > 0$, on en déduit que $a_{n+2} > 0$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
   — Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$. Donc $\ln(a_n)$ est bien définie. De plus,
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = e^2 a_{n+1}^2 a_n^3$$
Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a_{n+2}) = 2 + 2\ln(a_{n+1}) + 3\ln(a_n).$$
Autrement dit,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} = 2 + 2b_{n+1} + 3b_n.}$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = 2 + 5\alpha$. On a alors
$$\boxed{\alpha = \frac{-1}{2}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$c_{n+2} = b_{n+2} - \alpha.$$
donc d'après les questions 2 et 3, on a
$$c_{n+2} = 2 + 2b_{n+1} + 3b_n - (2 + 5\alpha).$$
D'où
$$c_{n+2} = 2(b_{n+1} - \alpha) + 3(b_n - \alpha).$$
Autrement dit,
$$\boxed{c_{n+2} = 2c_{n+1} + 3c_n.}$$

5. La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie donc une récurrence linéaire d'ordre 2. Elle a pour équation caractéristique $X^2 - 2X - 3 = 0$. Une solution évidente est donnée par -1. Donc l'autre solution est 3. On en déduit qu'il existe A et B réels tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = A(-1)^n + B3^n.$$
Exprimons A et B en fonction de c_0 et de c_1.
On a
$$\begin{array}{rcl} A + B & = & c_0 \\ -A + 3B & = & c_1 \end{array}$$
ce qui est équivalent à
$$\begin{array}{lcl} A + B & = & c_0 \\ 4B & = & c_0 + c_1 \end{array}$$
On obtient alors comme solution
$$\boxed{B = \frac{c_0 + c_1}{4}, A = \frac{3c_0 - c_1}{4}.}$$
Or $b_0 = 0, b_1 = \ln(2), c_0 = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{2\ln(2)+1}{2}$. Donc $A = \frac{2-2\ln(2)}{8} = \frac{1-\ln(2)}{4}$, $B = \frac{1+\ln(2)}{4}$.
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, c_n = (\frac{1-\ln(2)}{4})(-1)^n + (\frac{1+\ln(2)}{4})(3)^n.}$$
D'où
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, b_n = (\frac{1-\ln(2)}{4})(-1)^n + (\frac{1+\ln(2)}{4})(3)^n - \frac{1}{2}.}$$
D'où
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \exp\left((\frac{1-\ln(2)}{4})(-1)^n + (\frac{1+\ln(2)}{4})(3)^n - \frac{1}{2}\right).}$$

Corrigé du DS n° 3 de mathématiques

Problème

Pour faire patienter des étudiants de BCPST jusqu'~~au prochain DS~~ aux vacances, on souhaite réaliser un calendrier de l'Avent. Pour cela, on dispose d'une boîte cartonnée dans laquelle sont prédécoupées des fenêtres numérotées (qui seront ouvertes progressivement, une par jour). Derrière chaque fenêtre, on cache une des surprises suivantes : un bonbon au chocolat (noté B), une truffe au chocolat (notée T), une pâte de fruit (notée P), une figurine en plastique (notée F), ou ~~un exo de maths~~ un message d'encouragement (noté M). On dispose d'autant de surprises de chaque type que l'on veut et on peut remplir le calendrier de toutes les façons possibles, sauf placer deux chocolats deux jours de suite afin d'éviter les indigestions.

Ce problème propose de dénombrer tous les calendriers possibles. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre total de calendriers de n cases, c_n le nombre d'entre eux dont la n-ième case cache un bonbon ou une truffe au chocolat (donc B ou T) et d_n le nombre d'entre eux dont la n-ième case ne cache ni un bonbon ni une truffe au chocolat (donc P ou F ou M).

1. (a) *Déterminer u_1, c_1 et d_1.*

▶ Puisqu'il y a cinq surprises différentes, on a $\boxed{u_1 = 5}$. Puisque deux d'entre elles sont au chocolat (B ou T), on a $\boxed{c_1 = 2}$. Et puisque trois d'entre elles ne sont pas pas au chocolat (P ou F ou M), on a $\boxed{d_1 = 3}$.

(b) *Déterminer u_2, c_2 et d_2.*

▶ Puisqu'on ne peut pas placer deux chocolats deux jours de suites, on a :

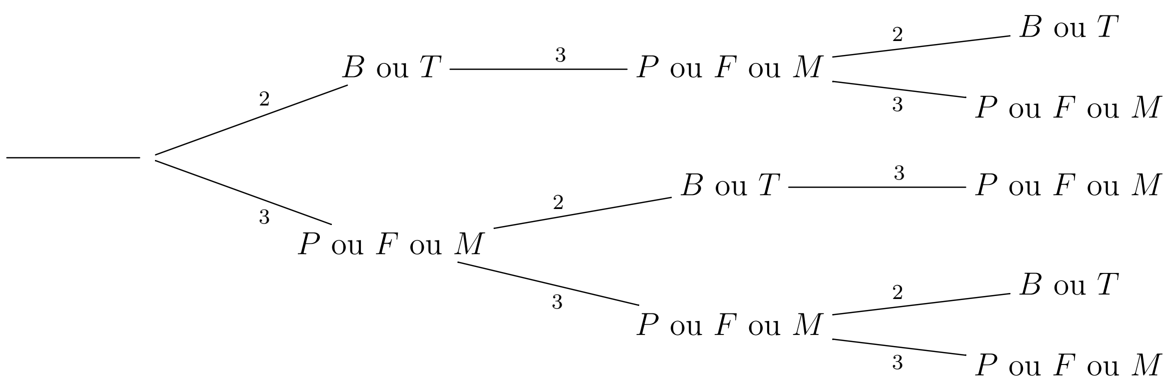
$$u_2 = \underbrace{2}_{\substack{\text{choix de } B \text{ ou } T\\ \text{pour la 1}^{\text{re}} \text{ case}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M\\ \text{pour la 2}^{\text{e}} \text{ case}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M\\ \text{pour la 1}^{\text{re}} \text{ case}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{5}_{\substack{\text{n'importe quel choix}\\ \text{pour la 2}^{\text{e}} \text{ case}}} = \boxed{21},$$

$$c_2 = \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M\\ \text{pour la 1}^{\text{re}} \text{ case}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{2}_{\substack{\text{choix de } B \text{ ou } T\\ \text{pour la 2}^{\text{e}} \text{ case}}} = \boxed{6},$$

$$d_2 = \underbrace{5}_{\substack{\text{n'importe quel choix}\\ \text{pour la 1}^{\text{re}} \text{ case}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M\\ \text{pour la 2}^{\text{e}} \text{ case}}} = \boxed{15}.$$

(c) *Justifier que $u_3 = 93$, $c_3 = 30$ et $d_3 = 63$.*

▶ On utilise l'arbre de dénombrement suivant :



On obtient donc :

$$u_3 = 2\times3\times2+2\times3\times3+3\times2\times3+3\times3\times2+3\times3\times3 = 12+18+18+18+27 = \boxed{93},$$
$$c_3 = 2\times3\times2+3\times3\times2 = 12+18 = \boxed{30},$$
$$d_3 = 2\times3\times3+3\times2\times3+3\times3\times3 = 18+18+27 = \boxed{63}.$$

2. *Pour cette question, on fixe un entier $n \geqslant 1$.*

(a) *Exprimer u_n en fonction de c_n et d_n.*

▶ On note :
— U_n l'ensemble des calendriers de n cases,
— C_n le sous-ensemble de ceux dont la n-ième case cache un chocolat
— et D_n le sous-ensemble de ceux dont la n-ième case ne cache pas un chocolat.

Alors $U_n = C_n \cup D_n$ et $C_n \cap D_n = \emptyset$. On en déduit que C_n et D_n forment une partition de U_n donc :

$$u_n = \mathrm{card}(U_n) = \mathrm{card}(C_n \cup D_n) = \mathrm{card}(C_n) + \mathrm{card}(D_n) = \boxed{c_n + d_n}.$$

Le mot clef ici est «partition». On peut également raisonner avec le mot clef «complémentaire» (D_n est le complémentaire de C_n dans U_n). Au moins l'un de ces deux mots clefs doit apparaître clairement dans votre justification.

(b) *Justifier que $u_{n+1} = 3c_n + 5d_n$.*

▶ Pour réaliser un calendrier de $n+1$ cases, il suffit de rajouter une $(n+1)$-ième case à un calendrier de n cases déjà réalisé. Mais on ne peut pas rajouter une $(n+1)$-ième case qui cache un chocolat si la n-ième case du calendrier de n-cases cache un chocolat, sinon on obtiendrait deux chocolats de suite les deux derniers jours. On a donc :

$$u_{n+1} = \underbrace{c_n}_{\substack{\text{choix d'un calendrier de}\\ n \text{ cases dont la } n\text{-ième}\\ \text{cache un chocolat}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M\\ \text{pour la } (n+1)\text{-ième case}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{d_n}_{\substack{\text{choix d'un calendrier de}\\ n \text{ cases dont la } n\text{-ième}\\ \text{ne cache pas un chocolat}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{5}_{\substack{\text{n'importe quel choix}\\ \text{pour la } (n+1)\text{-ième case}}}$$
$$= \boxed{3c_n + 5d_n}.$$

(c) *Exprimer c_{n+1} et d_{n+1} en fonction de c_n et d_n.*

▶ En raisonnant comme à la question précédente, on obtient :

$$c_{n+1} = \underbrace{d_n}_{\substack{\text{choix d'un calendrier de}\\ n \text{ cases dont la } n\text{-ième}\\ \text{ne cache pas un chocolat}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{2}_{\substack{\text{choix de } B \text{ ou } T\\ \text{pour la } (n+1)\text{-ième case}}} = \boxed{2d_n}$$

et

$$d_{n+1} = \underbrace{c_n}_{\substack{\text{choix d'un calendrier de}\\ n \text{ cases dont la } n\text{-ième}\\ \text{cache un chocolat}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M\\ \text{pour la } (n+1)\text{-ième case}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{d_n}_{\substack{\text{choix d'un calendrier de}\\ n \text{ cases dont la } n\text{-ième}\\ \text{ne cache pas un chocolat}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{3}_{\substack{\text{choix de } P \text{ ou } F \text{ ou } M\\ \text{pour la } (n+1)\text{-ième case}}}$$
$$= \boxed{3c_n + 3d_n}.$$

On peut aussi utiliser les questions précédentes pour obtenir l'expression de l'une à partir de celle de l'autre. Par exemple :

$$d_{n+1} = u_{n+1} - c_{n+1} = (3c_n + d_n) - 2d_n = 3c_n + 3d_n.$$

3. *À l'aide des résultats précédents, déterminer deux constantes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telles que*

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

► Analyse. On cherche deux constantes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Soit $n \geqslant 1$. On a d'après les résultats des questions précédentes :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3c_{n+1} + 5d_{n+1} \\ &= 3(2d_n) + 5(3c_n + 3d_n) \\ &= 15c_n + 21d_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} au_{n+1} + bu_n &= a(3c_n + 5d_n) + b(c_n + d_n) \\ &= (3a + b)c_n + (5a + b)d_n. \end{aligned}$$

Pour que «$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$» soit vraie, il suffit donc que (a, b) soit solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3a + b = 15 & (L_1) \\ 5a + b = 21 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 3a + b = 15 & \\ \quad 2a = 6 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} b = 15 - 3a = 6 \\ a = 3 \end{cases}.$$

Synthèse. On pose $\boxed{a = 3}$ et $\boxed{b = 6}$. En reprenant les mêmes calculs que dans l'analyse, on obtient :

$$\forall n \geqslant 1, \quad au_{n+1} + bu_n = (3a + b)c_n + (5a + b)d_n = 15c_n + 21d_n = u_{n+2}.$$

Aidez-vous des premières questions pour vérifier vos résultats. Ainsi :

$$3u_2 + 6u_1 = 3 \times 21 + 6 \times 5 = 63 + 30 = 93 = u_3.$$

4. *Exprimer u_n en fonction de l'entier $n \geqslant 1$. Puis écrire cette expression sous la forme :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{x + y\sqrt{33}}{2}\left(\frac{x' + y'\sqrt{33}}{2}\right)^n + \frac{x - y\sqrt{33}}{2}\left(\frac{x' - y'\sqrt{33}}{2}\right)^n$$

où $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ sont des constantes à déterminer.

► D'après le résultat de la question précédente, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est :

$$q^2 = 3q + 6 \iff q^2 - 3q - 6 = 0.$$

Son discriminant vaut $\Delta = (-3)^2 + 4 \times 6 = 33 > 0$. L'équation caractéristique admet donc deux solutions réelles distinctes :

$$q_1 = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{3 - \sqrt{33}}{2}.$$

Il existe donc deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \lambda_1 q_1^{n-1} + \lambda_2 q_2^{n-1}.$$

Attention à l'ordre des quantificateurs : «$\exists(\lambda_1, \lambda_2), \forall n$»$\neq$«$\forall n, \exists(\lambda_1, \lambda_2)$» !!

Pour $n=1$ et $n=2$, on obtient d'après les résultats de la question 1 :

$$\begin{cases} u_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ u_2 = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{1}\lambda_1 + \quad \lambda_2 = 5 & (L_1) \\ q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 = 21 & (L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{1}\lambda_1 + \qquad\qquad \lambda_2 = 5 \\ \qquad\quad \boxed{(q_2-q_1)}\lambda_2 = 21 - 5q_1 & (L_2 \leftarrow L_2 - q_1 L_1) \end{cases}$$

le système est de rang maximal car $q_1 \neq q_2$ (car $\Delta > 0$) donc il admet une unique solution

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 5 - \lambda_2 = \frac{330-165+27\sqrt{33}}{66} = \frac{165+27\sqrt{33}}{66} \\ \lambda_2 = \frac{21-5q_1}{q_2-q_1} = \frac{\frac{42-15-5\sqrt{33}}{2}}{\frac{-2\sqrt{33}}{2}} = \frac{27-5\sqrt{33}}{-2\sqrt{33}} = \frac{165-27\sqrt{33}}{66} \end{cases}$$

Par conséquent, on a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \boxed{\left(\frac{165+27\sqrt{33}}{66}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{165-27\sqrt{33}}{66}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n-1}}$$

$$= \left(\frac{\frac{165+27\sqrt{33}}{66}}{\frac{3+\sqrt{33}}{2}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{\frac{165-27\sqrt{33}}{66}}{\frac{3-\sqrt{33}}{2}}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{(165+27\sqrt{33})(3-\sqrt{33})}{33(3+\sqrt{33})(3-\sqrt{33})}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{(165-27\sqrt{33})(3+\sqrt{33})}{33(3-\sqrt{33})(3+\sqrt{33})}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{495+81\sqrt{33}-165\sqrt{33}-891}{33(9-33)}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{495-81\sqrt{33}+165\sqrt{33}-891}{33(9-33)}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{396-84\sqrt{33}}{-33\times 24}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{-396+84\sqrt{33}}{-33\times 24}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{12+\frac{28}{11}\sqrt{33}}{24}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{12-\frac{28}{11}\sqrt{33}}{24}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n}$$

$$= \boxed{\left(\frac{1+\frac{7}{33}\sqrt{33}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\frac{7}{33}\sqrt{33}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^{n}}.$$

D'où le résultat demandé en posant :

$$\boxed{x=1}, \quad \boxed{y=\tfrac{7}{33}}, \quad \boxed{x'=3} \quad \text{et} \quad \boxed{y'=1}.$$

N'hésitez pas à poser vos opérations au brouillon pour ne pas perdre du temps : le calcul mental est toujours très chronophage !!

5. *À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire que :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell}\left(\frac{11}{3}\right)^{\ell} + \frac{7}{3} \times \sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell+1}\left(\frac{11}{3}\right)^{\ell}\right).$$

► Soit $n \geqslant 1$. On a d'après le résultat précédent :

$$u_n = \frac{1+\frac{7}{33}\sqrt{33}}{2\times 2^n}\left(3+\sqrt{33}\right)^n + \frac{1-\frac{7}{33}\sqrt{33}}{2\times 2^n}\left(3-\sqrt{33}\right)^n.$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
&\left(3+\sqrt{33}\right)^n\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\
&=\underbrace{\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k}_{=S_1}+\underbrace{\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k}_{=S_2} \quad \text{en séparant les indices pairs et impairs}
\end{aligned}$$

et de même :

$$\left(3-\sqrt{33}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(-\sqrt{33}\right)^k=\underbrace{\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k}_{=S_1}-\underbrace{\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k}_{=S_2}$$

car $(-\sqrt{33})^k=(\sqrt{33})^k$ si k est pair et $(-\sqrt{33})^k=-(\sqrt{33})^k$ si k est impair. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
u_n&=\frac{1}{2\times 2^n}\left[\left(1+\tfrac{7}{33}\sqrt{33}\right)(S_1+S_2)+\left(1-\tfrac{7}{33}\sqrt{33}\right)(S_1-S_2)\right]\\
&=\frac{1}{2\times 2^n}\left[2S_1+\left(\tfrac{14}{33}\sqrt{33}\right)S_2\right]=\frac{1}{2^n}\left[S_1+(\tfrac{7}{33}\sqrt{33})S_2\right].
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
S_1&=\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k=\sum_{0\leqslant 2\ell\leqslant n}\binom{n}{2\ell}3^{n-2\ell}\left(\sqrt{33}\right)^{2\ell} \quad \text{en posant } k=2\ell\\
&=\sum_{0\leqslant \ell\leqslant n/2}\binom{n}{2\ell}3^n\left(\left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2\right)^\ell=3^n\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\left(\frac{33}{9}\right)^\ell=3^n\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
S_2&=\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left(\sqrt{33}\right)^k=\sum_{0\leqslant 2\ell+1\leqslant n}\binom{n}{2\ell+1}3^{n-(2\ell+1)}\left(\sqrt{33}\right)^{2\ell+1} \quad \text{en posant } k=2\ell+1\\
&=\sum_{-1/2\leqslant \ell\leqslant (n-1)/2}\binom{n}{2\ell+1}3^n\left(\left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2\right)^\ell\left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)=3^n\left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall n\geqslant 1,\quad u_n&=\frac{1}{2^n}\left[3^n\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell+\left(\tfrac{7}{33}\sqrt{33}\right)3^n\left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell\right]\\
&=\frac{3^n}{2^n}\left[\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell+\left(\frac{7\times 33}{3\times 33}\right)\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell\right]\\
&=\boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^n\times\left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2\ell}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell+\frac{7}{3}\times\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}\left(\frac{11}{3}\right)^\ell\right)}.
\end{aligned}$$

Exercice 1

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'application :

$$\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\lambda x + y, \lambda y + x).$$

On fixe $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ dans tout l'exercice.

1. (a) *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système suivant d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:*

$$\begin{cases} \lambda x + y = a \\ x + \lambda y = b \end{cases}.$$

On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de λ puis, si besoin, les sous-cas $a = b$ ou $a = -b$.

▶ On a d'après la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} \lambda x + y = a & (L_1) \\ x + \lambda y = b & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{1}x + \lambda y = b & (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ \lambda x + y = a & (L_2 \leftrightarrow L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{1}x + \lambda y = b \\ \boxed{(1-\lambda^2)}y = a - \lambda b & (L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1) \end{cases}$$

<u>1^er cas</u> : $1 - \lambda^2 \neq 0 \iff (\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1)$. Alors le système est de rang maximal donc il admet une unique solution :

$$\begin{cases} x = b - \lambda y = \dfrac{b(1-\lambda^2) - \lambda(a - \lambda b)}{1 - \lambda^2} = \dfrac{b - \lambda a}{1 - \lambda^2} \\ y = \dfrac{a - \lambda b}{1 - \lambda^2} \end{cases}.$$

<u>2^e cas</u> : $\lambda = 1$. Alors le système est équivalent à :

$$\begin{cases} \boxed{1}x + y = b \\ 0 = a - b \end{cases}.$$

Le système est de rang 1, il admet une équation auxiliaire et une équation auxiliaire.
<u>1^er sous-cas</u> : $a = b$. Alors l'équation auxiliaire est compatible donc le système admet une infinité de solutions de la forme :

$$(x, y) = (b - y, y).$$

<u>2^e sous-cas</u> : $a \neq b$. Alors l'équation auxiliaire n'est pas compatible donc le système n'a pas de solutions.
<u>3^e cas</u> : $\lambda = -1$. Alors le système est équivalent à :

$$\begin{cases} \boxed{1}x - y = b \\ 0 = a + b \end{cases}.$$

Le système est de rang 1, il admet une équation auxiliaire et une équation auxiliaire.
<u>1^er sous-cas</u> : $a = -b$. Alors l'équation auxiliaire est compatible donc le système admet une infinité de solutions de la forme :

$$(x, y) = (b + y, y).$$

<u>2^e sous-cas</u> : $a \neq -b$. Alors l'équation auxiliaire n'est pas compatible donc le système n'a pas de solutions.
<u>Conclusion</u>. Finalement l'ensemble des solutions du système est :

$$\boxed{\begin{cases} \left\{\left(\frac{b-\lambda a}{1-\lambda^2}, \frac{a-\lambda b}{1-\lambda^2}\right)\right\} & \text{si } \lambda \neq 1 \text{ et } \lambda \neq -1 \\ \{(b-y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} & \text{si } \lambda = 1 \text{ et } a = b \\ \emptyset & \text{si } \lambda = 1 \text{ et } a \neq b \\ \{(b+y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} & \text{si } \lambda = -1 \text{ et } a = -b \\ \emptyset & \text{si } \lambda = 1 \text{ et } a \neq -b \end{cases}}.$$

(b) *Justifier que si $|\lambda| \neq 1$ alors $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.*

▶ On suppose que $|\lambda| \neq 1$ donc que $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$. D'après le résultat de la question précédente, l'équation $\varphi_\lambda(x, y) = (a, b)$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ admet une unique solution pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On en déduit que $\boxed{\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ est bijective}}$. De plus, sa bijection réciproque est par définition :

$$\boxed{\varphi_\lambda^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, b) \mapsto \left(\frac{b - \lambda a}{1 - \lambda^2}, \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda^2}\right)}.$$

(c) *Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ_λ dans les cas $\lambda = -1$ et $\lambda = 1$. Dans le cas de réponses négatives, on les justifiera par des contre-exemples.*

▶ <u>1^er cas</u> : $\lambda = -1$. D'après le résultat de la question 1(a), le couple $(a, b) = (0, 0)$ admet au moins deux antécédents car $a = -b$ (par exemple $(0, 0)$ pour $y = 0$ et $(1, 1)$ pour $y = 1$) donc $\boxed{\varphi_{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ n'est pas injective}}$. De plus, le couple $(a, b) = (0, 1)$ n'admet pas d'antécédents car $a \neq -b$ donc $\boxed{\varphi_{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ n'est pas surjective}}$.

<u>2^e cas</u> : $\lambda = 1$. D'après le résultat de la question 1(a), le couple $(a, b) = (0, 0)$ admet au moins deux antécédents car $a = b$ (par exemple $(0, 0)$ pour $y = 0$ et $(-1, 1)$ pour $y = 1$) donc $\boxed{\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ n'est pas injective}}$. De plus, le couple $(a, b) = (0, 1)$ n'admet pas d'antécédents car $a \neq b$ donc $\boxed{\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ n'est pas surjective}}$.

2. *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\varphi_{\lambda'}(\varphi_\lambda(x, y))$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\varphi_{\lambda'}(\varphi_\lambda(x, y)) &= \varphi_{\lambda'}(\lambda x + y, \lambda y + x) \\
&= \Big(\lambda'(\lambda x + y) + (\lambda y + x), \lambda'(\lambda y + x) + (\lambda x + y)\Big) \\
&= \boxed{\Big((\lambda'\lambda + 1)x + (\lambda' + \lambda)y, (\lambda'\lambda + 1)y + (\lambda' + \lambda)x\Big)}.
\end{aligned}$$

On rappelle que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on définit : $c \times (a, b) = (ca, cb)$.

3. *On suppose que $\lambda + \lambda' \neq 0$ dans cette question.*

(a) *Montrer que :*

$$\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda = c \times \varphi_\mu$$

où $(c, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes à exprimer en fonction de λ et λ'.

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big(\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda\Big)(x, y) &= \varphi_{\lambda'}(\varphi_\lambda(x, y)) \quad \text{par définition de la composition} \\
&= \Big((\lambda'\lambda + 1)x + (\lambda' + \lambda)y, (\lambda'\lambda + 1)y + (\lambda' + \lambda)x\Big) \\
&= (\lambda' + \lambda) \times \left(\frac{\lambda'\lambda + 1}{\lambda' + \lambda}x + y, \frac{\lambda'\lambda + 1}{\lambda' + \lambda}y + x\right) \quad \text{car } \lambda + \lambda' \neq 0 \\
&= (\lambda' + \lambda) \times \varphi_{(\lambda'\lambda+1)/(\lambda'+\lambda)}(x, y).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda = c \times \varphi_\mu$ en posant $\boxed{c = \lambda' + \lambda}$ et $\boxed{\mu = \frac{\lambda'\lambda+1}{\lambda'+\lambda}}$.

(b) *Que peut-on en déduire pour $\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'}$? Pourquoi ce résultat est-il surprenant ?*

▶ En raisonnant comme à la question précédente (en intervertissant les constantes λ et λ'), on obtient que $\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'} = c' \times \varphi_{\mu'}$ en posant $c' = \lambda + \lambda' = \lambda' + \lambda = c$ et $\mu' = \frac{\lambda\lambda'+1}{\lambda+\lambda'} = \frac{\lambda'\lambda+1}{\lambda'+\lambda} = \mu$. Par conséquent :

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'} = c' \times \varphi_{\mu'} = c \times \varphi_\mu = \boxed{\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda}.$$

Ce résultat est surprenant car $\boxed{\text{la composition des applications n'est pas commutative}}$.

4. *On suppose que $\lambda+\lambda'=0$ dans cette question.*

   (a) *Montrer que :*
$$\varphi_{\lambda'}\circ\varphi_\lambda = d\times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$$
   où $d\in\mathbb{R}$ est une constante à exprimer en fonction de λ.

   ▶ On a d'après le résultat de la question 2 :
$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \Big(\varphi_{\lambda'}\circ\varphi_\lambda\Big)(x,y) &= \varphi_{\lambda'}\left(\varphi_\lambda(x,y)\right) \quad \text{par définition de la composition}\\ &= \Big((\lambda'\lambda+1)x+0,(\lambda'\lambda+1)y+0\Big) \quad \text{car } \lambda+\lambda'=0\\ &= (\lambda'\lambda+1)\times(x,y)\\ &= (\lambda'\lambda+1)\times\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(x,y).\end{aligned}$$
   On en déduit que $\varphi_{\lambda'}\circ\varphi_\lambda = d\times\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ en posant $\boxed{d=\lambda'\lambda+1}$.

   (b) *On suppose que $d\neq 0$. Calculer $\varphi_\lambda\circ\left(\frac{1}{d}\times\varphi_{\lambda'}\right)$. Que peut-on en déduire ?*

   ▶ On a :
$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \Big(\varphi_\lambda\circ\left(\tfrac{1}{d}\times\varphi_{\lambda'}\right)\Big)(x,y) &= \varphi_\lambda\left(\tfrac{1}{d}\times\varphi_{\lambda'}(x,y)\right) \quad \text{par définition de la composition}\\ &= \varphi_\lambda\left(\tfrac{1}{d}\times(\lambda'x+y,\lambda'y+x)\right)\\ &= \varphi_\lambda\left(\tfrac{\lambda'x+y}{d},\tfrac{\lambda'y+x}{d}\right)\\ &= \left(\lambda\tfrac{\lambda'x+y}{d}+\tfrac{\lambda'y+x}{d},\lambda\tfrac{\lambda'y+x}{d}+\tfrac{\lambda'x+y}{d}\right)\\ &= \tfrac{1}{d}\times\Big((\lambda\lambda'+1)x+(\lambda+\lambda')y,(\lambda\lambda'+1)y+(\lambda+\lambda')x\Big)\\ &= \tfrac{\lambda\lambda'+1}{d}\times(x+0,y+0) \quad \text{car } \lambda+\lambda'=0\\ &= \boxed{(x,y)} \quad \text{car } d=\lambda\lambda'+1.\end{aligned}$$
   Ainsi $\varphi_\lambda\circ\left(\frac{1}{d}\times\varphi_{\lambda'}\right)=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Or on a montré à la question précédente que $\left(\frac{1}{d}\times\varphi_{\lambda'}\right)\circ\varphi_\lambda$ (en divisant le résultat par d car $d\neq 0$). On en déduit que $\boxed{\varphi_\lambda:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \text{ est une application inversible}}$ et que son application inverse est $\boxed{\varphi_\lambda^{-1}=\frac{1}{d}\times\varphi_{\lambda'}}$.

   On retrouve le résultat de la question 1(b) car $\lambda+\lambda'=0 \iff \lambda'=-\lambda$ donc :
$$d=-\lambda^2+1\neq 0 \iff |\lambda|\neq 1$$
$$\text{et}\quad \tfrac{1}{d}\times\varphi_{\lambda'}:(a,b)\mapsto\tfrac{1}{-\lambda^2+1}\times(-\lambda a+b,-\lambda b+a)=\left(\frac{b-\lambda a}{1-\lambda^2},\frac{a-\lambda b}{1-\lambda^2}\right).$$

Exercice 2

On considère des grilles rectangulaires de mots croisés ayant 6 lignes, 7 colonnes et 10 cases noires (toutes les autres cases sont vides). On pourra répondre aux questions suivantes sans simplifier les résultats.

1. *Combien peut-on former de telles grilles différentes ?*

   ▶ Chaque grille contient $6\times7=42$ cases. Dénombrer les grilles différentes revient à dénombrer les façons de placer les 10 cases noires parmi les 42 cases. Le nombre de grilles différentes est donc égal au nombre de 10-combinaisons d'un ensemble à 42 éléments, c'est-à-dire :
$$\boxed{\binom{42}{10}}.$$

2. *Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont :*

(a) aucune case noire dans un coin ?

► Chaque grille a 4 coins et donc $42 - 4 = 38$ cases qui ne sont pas des coins. En raisonnant comme à la question précédente, le nombre de grilles différentes ayant aucune case noire dans un coin est égal à :

$$\boxed{\binom{38}{10}}.$$

(b) au plus deux cases noires dans des coins ?

► Avoir au plus deux cases noires dans des coins revient à avoir :

— aucune case noire dans un coin,

— ou bien une seule case noire dans un coin,

— ou bien exactement deux cases noires dans deux coins.

On a partitionné l'ensemble des grilles différentes ayant au plus deux cases noires dans des coins en trois sous-ensembles (disjoints). Son cardinal est donc égal à :

$$\underbrace{\binom{38}{10}}_{\substack{\text{choix de 10 cases}\\ \text{pas dans des coins}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{\binom{4}{1}}_{\substack{\text{choix de 1 case}\\ \text{dans 1 des 4 coins}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{\binom{38}{9}}_{\substack{\text{choix de 9 cases}\\ \text{pas dans des coins}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{\binom{4}{2}}_{\substack{\text{choix de 2 cases}\\ \text{dans 2 des 4 coins}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{\binom{38}{8}}_{\substack{\text{choix de 8 cases}\\ \text{pas dans des coins}}}$$

$$= \boxed{\binom{38}{10} + 4\binom{38}{9} + \binom{4}{2}\binom{38}{8}}.$$

On peut également passer au complémentaire en dénombrant les grilles ayant au moins trois cases noires dans des coins, c'est-à-dire :

$$\binom{42}{10} - \binom{4}{3}\binom{38}{7} - \binom{38}{6}.$$

Les deux résultats sont bien égaux d'après la formule de Vandermonde :

$$\binom{42}{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{4}{k}\binom{38}{10-k}.$$

(c) au moins une case noire dans la première ligne ?

► Le complémentaire de l'ensemble des grilles ayant au moins une case noire dans la première ligne est l'ensemble des grilles n'ayant aucune case noire dans la première ligne. Puisqu'il y a $42 - 7 = 35$ cases qui ne sont pas dans la première ligne, le nombre de grilles différentes ayant au moins une case noire dans la première ligne est égal à :

$$\boxed{\binom{42}{10} - \binom{35}{10}}.$$

(d) une seule case noire dans la dernière ligne et une seule case noire dans la première colonne ?

► Avoir une seule case noire dans la dernière ligne et une seule case noire dans la première colonne revient à avoir :

— une case noire à l'intersection de la dernière ligne et de la première colonne puis les neuf autres cases noires dans le reste de la grille,

— ou bien une case noire dans la dernière ligne mais pas dans la première colonne puis une case noire dans la première colonne mais pas dans la première ligne puis les huit autres cases noires dans le reste de la grille.

On a partitionné l'ensemble des grilles différentes ayant une seule case noire dans la dernière ligne et une seule case noire dans la première colonne en deux-sous-ensembles (disjoints). Son cardinal est donc égal à :

$$\underbrace{\binom{42-7-6+1}{9}}_{\substack{\text{choix de 9 cases}\\ \text{dans le reste de la grille}}} \overbrace{+}^{\text{ou bien}} \underbrace{\binom{7-1}{1}}_{\substack{\text{choix de 1 case}\\ \text{dans la dernière ligne}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{\binom{6-1}{1}}_{\substack{\text{choix de 1 case}\\ \text{dans la première colonne}}} \overbrace{\times}^{\text{puis}} \underbrace{\binom{42-7-6+1}{8}}_{\substack{\text{choix de 8 cases}\\ \text{dans le reste de la grille}}}$$

$$= \boxed{\binom{30}{9} + 42\binom{30}{8}}.$$

3. *Combien y a-t-il de façons différentes de remplir une telle grille (avec l'alphabet latin) ?*

▶ Chaque grille contient $42 - 10 = 32$ cases à remplir (qui ne sont pas noires). Dénombrer les façons différentes de remplir une grille revient à dénombrer les façons de placer une des 26 lettres de l'alphabet dans chaque case. Le nombre de façons différentes de remplir une grille est donc égal au nombre de 32-listes avec répétition d'un ensemble à 26 éléments, c'est-à-dire :

$$\boxed{26^{32}}.$$

Exercice 3

On considère la fonction réelle $f : \theta \mapsto 2\sin(\theta/2) + 3\sin(\theta/3)$.

1. *Justifier qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0, 6\pi]$ pour en déduire son étude sur $\mathbb{R}$.*

▶ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ comme somme et composées de fonctions usuelles définies sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta + 12\pi) &= 2\sin\left(\frac{\theta + 12\pi}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{\theta + 12\pi}{3}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + 6\pi\right) + 3\sin\left(\frac{\theta}{3} + 4\pi\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + 3\times 2\pi\right) + 3\sin\left(\frac{\theta}{3} + 2\times 2\pi\right) \\ &= \underbrace{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)}_{\text{car sin est } 2\pi\text{-périodique}} = f(\theta).\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } 12\pi\text{-périodique}}$.

> *Attention : f n'est pas 6π-périodique ! Par exemple :*
>
> $$f(\pi) = 2\sin(\pi/2) + 3\sin(\pi/3) = 2 + 3\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
>
> $$\textit{et} \quad f(\pi + 6\pi) = f(7\pi) = 2\sin(7\pi/2) + 3\sin(7\pi/3) = -2 + 3\tfrac{\sqrt{3}}{2} \neq f(\pi).$$

Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur 12π, par exemple $]-6\pi, 6\pi]$. Or on a de plus :

$$\begin{aligned}\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(-\theta) &= 2\sin\left(\frac{-\theta}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{-\theta}{3}\right) \\ &= \underbrace{-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)}_{\text{car sin est impaire}} = -f(\theta).\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire}}$. Il suffit donc de l'étudier sur $]-6\pi, 6\pi] \cap [0, +\infty[= [0, 6\pi]$. Finalement, il suffit d'étudier f sur $\boxed{[0, 6\pi]}$ pour en déduire son étude sur $\mathbb{R}$ par imparité et périodicité.

2. *Dresser le tableau des variations de f sur $[0, 6\pi]$ sans calculer la valeur de chaque extremum.*

▶ La fonction f est dérivable sur $[0, 6\pi]$ comme somme et composées de fonction usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0, 6\pi], \quad f'(\theta) &= \frac{2}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{3}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta/2} + e^{i\theta/3}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(2\cos\left(\frac{\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{3}}{2}\right) e^{i(\theta/2+\theta/3)/2}\right) \quad \text{par factorisation par l'angle moitié} \\
&= \mathrm{Re}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{12}\right) e^{i5\theta/12}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{12}\right)\cos\left(\frac{5\theta}{12}\right).
\end{aligned}$$

Pensez à factoriser l'expression de vos dérivées (à l'aide d'une factorisation par l'angle moitié dans le cas de fonctions trigonométriques) pour pouvoir facilement étudier le signe.

Or on a d'après le cercle trigonométrique :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\theta}{12}\right) \geqslant 0 &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant \frac{\theta}{12} \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -6\pi + 24k\pi \leqslant \theta \leqslant 6\pi + 24k\pi
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{5\theta}{12}\right) \geqslant 0 &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant \frac{5\theta}{12} \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{6\pi}{5} + \frac{24k\pi}{5} \leqslant \theta \leqslant \frac{6\pi}{5} + \frac{24k\pi}{5}.
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau des variations de f sur $[0, 6\pi]$:

θ	0		$\frac{6\pi}{5}$		$\frac{18\pi}{5}$		6π
$\cos(\frac{\theta}{12})$		$+$		$+$		$+$	0
$\cos(\frac{5\theta}{12})$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(\frac{6\pi}{5})$	$\searrow$	$f(\frac{18\pi}{5})$	$\nearrow$	$f(6\pi)$

3. *En déduire l'étude de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

▶ D'après le tableau des variations précédent, on remarque que certains réels ont on moins deux antécédents par f (par exemple les réels compris entre $\max\{f(0), f(18\pi/5)\}$ et $f(6\pi/5)$) donc $\boxed{\text{l'application } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ n'est pas injective}}$. De plus, puisque la fonction f est impaire et 12π-périodique d'après le résultat de la question 1, on remarque que certains réels n'ont pas d'antécédents par f (par exemple les réels strictement supérieurs à $\max\{f(6\pi/5), -f(6\pi/5)\}$) donc $\boxed{\text{l'application } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ n'est pas surjective}}$. Par conséquent $\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ n'est pas bijective}}$.

Attention !! Le tableau des variations sur $[0, 6\pi]$ n'est pas suffisant pour étudier la surjectivité de f sur $\mathbb{R}$: un réel qui n'a pas d'antécédent dans $[0, 6\pi]$ pourrait en avoir un dans $\mathbb{R}$ (c'est d'ailleurs le cas de $f(-6\pi/5) < \min\{f(0), f(18\pi/5)\}$ comme on peut le vérifier avec une calculatrice). Il faut donc utiliser l'imparité et la périodicité pour étudier la surjectivité sur $\mathbb{R}$.

4. (a) *Montrer que le maximum de f sur $[0, 6\pi]$ vaut $5\sin(2\pi/5)$.*

▶ On a d'après le cercle trigonométrique :

$$f(6\pi) = 2\sin(3\pi) + 3\sin(2\pi) = 0$$
$$\text{et} \quad f\left(\frac{6\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 3\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) + 3\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 5\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0.$$

D'après le tableau des variations de la question 2, on en déduit que le maximum de f sur $[0, 6\pi]$ vaut $\boxed{5\sin(2\pi/5)}$.

(b) *Exprimer le minimum de f sur $[0, 6\pi]$ en fonction de $\sin(\pi/5)$.*

▶ On a d'après le cercle trigonométrique :

$$f(0) = 2\sin(0) + 3\sin(0) = 0$$
$$\text{et} \quad f\left(\frac{18\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) + 3\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = 2\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) + 3\sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) < 0.$$

D'après le tableau des variations de la question 2, on en déduit que le maximum de f sur $[0, 6\pi]$ vaut $\boxed{-5\sin(\pi/5)}$.

(c) *Que valent les extrema de f sur $\mathbb{R}$?*

▶ D'après le cercle trigonométrique, on a $0 < \sin(\pi/5) < \sin(2\pi/5)$. Puisque la fonction f est impaire et 12π-périodique, on déduit des résultats précédents que le maximum de f sur $\mathbb{R}$ vaut $\boxed{5\sin(2\pi/5)}$ et que son minimum vaut $\boxed{-5\sin(2\pi/5)}$.

5. *Déterminer l'image directe par f de chaque ensemble suivant :*

$$I_1 =]0, 3\pi[, \quad I_2 =]2\pi, 4\pi[, \quad I_3 = [-\pi, \pi] \quad \textit{et} \quad I_4 = [100\pi, 200\pi].$$

▶ On a le tableau des variations suivant :

θ	$\frac{-6\pi}{5}$	$-\pi$	0	π	$\frac{6\pi}{5}$	2π	3π	$\frac{18\pi}{5}$	4π	6π
$f(x)$	$-5\sin(\frac{2\pi}{5})$	$f(-\pi)$	0	$f(\pi)$	$5\sin(\frac{2\pi}{5})$	$f(2\pi)$	$f(3\pi)$	$-5\sin(\frac{\pi}{5})$	$f(4\pi)$	0

— On a $f(3\pi) = 2\sin(3\pi/2) + 3\sin(\pi) = -2 < 0$ donc $\boxed{f(I_1) =]-2, 5\sin(2\pi/5)]}$.

— On a $f(2\pi) = 2\sin(\pi) + 3\sin(2\pi/3) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f(4\pi) = 2\sin(2\pi) + 3\sin(4\pi/3) = -3\frac{\sqrt{3}}{2} < f(2\pi)$ donc $\boxed{f(I_2) = [-5\sin(\pi/5), 3\sqrt{3}/2[}$.

— On a $f(\pi) = 2\sin(\pi/2) + 3\sin(\pi/3) = 2 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f(-\pi) = -f(\pi) = -2 - 3\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{f(I_3) = [-2 - 3\frac{\sqrt{3}}{2}, 2 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}]}$.

— L'intervalle I_4 est de longueur $200\pi - 100\pi = 100\pi > 12\pi$ or la fonction f est 12π-périodique, donc $\boxed{f(I_4) = [-5\sin(2\pi/5), 5\sin(2\pi/5)]}$ d'après le résultat de la question précédente.

Pensez à faire un tableau de variations pour ce type de questions, ça aide beaucoup. Faites attention aux bornes des intervalles (incluses ou excluses).

6. *Justifier que la restriction de f à $[2\pi, 3\pi]$ réalise une bijection vers un ensemble à déterminer.*

► D'après le tableau des variations précédent, la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$. D'après le théorème de la bijection, on en déduit que $\boxed{\text{la restriction de } f \text{ à } [2\pi, 3\pi] \text{ est bijective vers } [f(3\pi), f(2\pi)] = [-2, 3\sqrt{3}/2]}$.