Devoir surveillé 4 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. On cherche à étudier les équations différentielles de la forme

$$y" - 2y' + 10y = f \tag{E}$$

où f est une fonction donnée.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Dans cette question, f est la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 10x^2 + 2x + 1$.
   Résoudre l'équation (E). On cherchera une solution sous la forme d'un polynôme de degré 2.
3. Soient A et B des réels. On définit g par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.
   (a) Justifier que g est dérivable 2 fois.
   (b) Calculer $g" - 2g' + 10g$.
   (c) Déterminer A et B pour que $g" - 2g' + 10g = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
4. Résoudre l'équation $y" - 2y' + 10y = 77\cos(x) - 154\sin(x)$.

Exercice 2. On considère une population P divisée en trois classes d'âges : jeune, adulte, senior. On cherche à déterminer l'évolution de la population P en fonction du nombre de génération $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est le nombre de jeunes, y_n le nombre d'adultes, z_n le nombre de seniors. On suppose que l'évolution obéit à la règle suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 2y_n \\ y_{n+1} & = & x_n \\ z_{n+1} & = & y_n \end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.
3. Calculer A^2, A^3. En déduire pour tout entier n strictement positif A^n en fonction de A et de n. On pourra effectuer une disjonction de cas suivant la parité de n.
4. Déterminer en fonction de x_0, y_0, z_0 et de n les valeurs de x_n, y_n, z_n.

Exercice 3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice M_a par

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de M_a en fonction de a.
2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles M_a est inversible et calculer l'inverse dans ces cas.

Exercice 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{e^x} \ln(1+t^2)dt, g(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)dt$.

1. Justifier que les fonctions f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x).$$
3. En remarquant que $f = g \circ \exp$, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
4. En déduire les variations et les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f.
5. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$ et que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 5. Pour toute matrice matrice $K \in M_3(\mathbb{R})$, on définit le commutant de K par
$$C(K) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) | KM = MK\}.$$
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^{-1}.
2. Exprimer $P^{-1}AP$ en fonction de D. En déduire une expression simplifiée de A^n en fonction de P, P^{-1}, D, n.
3. Montrer que $C(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}$.
4. Montrer que $C(A) = \{PMP^{-1}, M \in C(D)\}$.

Exercice 6. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $A = (1,2)$ et $B = (-1,-1)$ deux points du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne pour les ensembles suivants :

   (a) $\{M \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}$. (b) $\{M \in \mathbb{R}^2, ||\overrightarrow{MA}|| - ||\overrightarrow{MB}|| = 0\}$.
2. Représenter ces deux ensembles dans un repère orthonormé.
3. Quelle est la nature (cercle, droite ou autre figure géométrique) de ces deux ensembles ? Dans le cas où on aurait une droite, déterminer une représentation paramétrique de celle-ci. Dans le cas où on aurait un cercle, déterminer le centre et le rayon.