Devoir surveillé 4 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. On cherche à étudier les équations différentielles de la forme

$$y" - 2y' + 10y = f \tag{E}$$

où f est une fonction donnée.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Dans cette question, f est la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 10x^2 + 2x + 1$.
   Résoudre l'équation (E). On cherchera une solution sous la forme d'un polynôme de degré 2.
3. Soient A et B des réels. On définit g par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.
   (a) Justifier que g est dérivable 2 fois.
   (b) Calculer $g" - 2g' + 10g$.
   (c) Déterminer A et B pour que $g" - 2g' + 10g = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
4. Résoudre l'équation $y" - 2y' + 10y = 77\cos(x) - 154\sin(x)$.

Correction

1. Résolvons l'équation $y" - 2y' + 10y = 0$ (H) qui est associée à (E). On reconnaît une équation linéaire homogène d'ordre deux d'équation caractéristique $X^2 - 2X + 10 = 0$. Son discriminant est -36. Donc les deux solutions de cette équation sont $r_1 = \frac{2-6i}{2} = 1 - 3i, r_2 = \frac{2+6i}{2} = 1 + 3i$. Les solutions de l'équation (H) sont donc exactement les fonctions de la forme

$$\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^x(\lambda_1\cos(3x) + \lambda_2\sin(3x)). \end{array}}$$

   où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax^2+bx+c$. g étant polynomiale, elle est dérivable deux fois et $g' = 2aX+b, g" = 2a$. On a

$$\begin{array}{rcl} g" - 2g' + 10g = f & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, 2a - 2(2ax+b) + 10(ax^2+bx+c) = 10x^2 + 2x + 1 \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, (10a-10)x^2 + (10b-4a-2)x + (2a-2b+10c-1) = 0 \end{array}$$

   Par unicité de l'écriture d'un polynôme sous la forme $\sum a_k X^k$, on en déduit que

$$g" - 2g' + 10g = f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 10a - 10 & = & 0 \\ 10b - 4a - 2 & = & 0 \\ 2a - 2b + 10c - 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

   Ce système étant équivalent à $a = 1, b = \frac{3}{5}, c = \frac{1}{50}$. Une solution de (E) est alors donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{1}{50}.$$

   Donc

$$\boxed{S = \left\{ \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^x(\lambda_1\cos(3x) + \lambda_2\sin(3x)) + x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{1}{50}, \end{array} (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

3. Soient A et B des réels. On définit g par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.
   (a) g étant une combinaison linéaire de fonctions cos et sin, elle est dérivables deux fois.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x), g''(x) = -A\cos(x) - B\sin(x)$. Donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, (g'' - 2g' + 10g)(x) = (-A - 2B + 10A)\cos(x) + (-B + 2A + 10B)\sin(x)$$
   D'où
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (g'' - 2g' + 10g)(x) = (-2B + 9A)\cos(x) + (2A + 9B)\sin(x)}$$
   (c) Pour avoir $g'' - 2g' + 10g = \alpha\cos + \beta\sin$, il suffit donc d'avoir
   $$\left\{\begin{array}{rcl} 9A - 2B & = & \alpha \\ 2A + 9B & = & \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$
   Or le déterminant de cette matrice est $81 + 4 = 85$. Elle est donc inversible et le système est alors équivalent à
   $$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{85}\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$
   Une solution est alors donnée par
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{9\alpha + 2\beta}{85}\cos(x) + \frac{-2\alpha + 9\beta}{85}\sin(x).}$$

4. D'après la question 3, une solution est donnée avec $\alpha = 77$ et $\beta = -154$. La fonction g définie par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{77}{17}\cos(x) - \frac{308}{17}\sin(x).$$
   est donc une solution. En superposant les solutions de l'équation homogène associée, on en déduit que les solutions sont exactement de la forme :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^x(\lambda_1\cos(3x) + \lambda_2\sin(3x)) + \frac{77}{17}\cos(x) - \frac{308}{17}\sin(x)}$$
   où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2. On considère une population P divisée en trois classes d'âges : jeune, adulte, senior. On cherche à déterminer l'évolution de la population P en fonction du nombre de génération $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est le nombre de jeunes, y_n le nombre d'adultes, z_n le nombre de seniors. On suppose que l'évolution obéit à la règle suivante :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 2y_n \\ y_{n+1} & = & x_n \\ z_{n+1} & = & y_n \end{array}\right.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.
3. Calculer A^2, A^3. En déduire pour tout entier n strictement positif A^n en fonction de A et de n. On pourra effectuer une disjonction de cas suivant la parité de n.
4. Déterminer en fonction de x_0, y_0, z_0 et de n les valeurs de x_n, y_n, z_n.

Correction

On considère une population P divisée en trois classes d'âges : jeune, adulte, senior. On cherche à déterminer l'évolution de la population P en fonction du nombre de génération $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est le nombre de jeunes, y_n le nombre d'adultes, z_n le nombre de seniors. On suppose que l'évolution obéit à la règle suivante :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 2y_n \\ y_{n+1} & = & x_n \\ z_{n+1} & = & y_n \end{array}\right.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 2y_n \\ y_{n+1} & = & x_n \\ z_{n+1} & = & y_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$
Donc on a $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : X_n = A^n X_0$. Montrons P par récurrence.
   - Initialisation : On a $X_0 = A^0 X_0$. Donc $P(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. On a $X_n = A^n X_0$. En multipliant par A, on a donc $AX_n = A^{n+1} X_0$. Autrement dit, $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.
     La propriété est donc héréditaire.
   - Conclusion :
     $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0.}$$

3. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A$.
   Pour tout $n \geq 1$,, on pose
   $$P(n) : (n \text{ pair }, A^n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} A^2) \text{ ou } (n \text{ impair }, A^n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A).$$
   Montrons que P est vraie pour tout $n \geq 1$ par récurrence.
   - Initialisation : On a $A^1 = A$. Donc $P(1)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
     - Cas 1 : $n = 2p$ (n pair).
       On a donc $n+1 = 2p+1$. D'après $P(n)$, $A^n = 2^{p-1} A^2$. Donc $A^{n+1} = 2^{p-1} A^3$. Or $A^3 = 2A$. Donc $A^{n+1} = 2^p A$. Or $p = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. On a bien $A^{n+1} = 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} A$.
     - Cas 2 : $n = 2p+1$ (n impair).
       On a donc $n+1 = 2p+2$. D'après $P(n)$, $A^n = 2^p A$. Donc $A^{n+1} = 2^p A^2$. Or $p = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1$. On a bien $A^{n+1} = 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} A^2$.

     La propriété est donc héréditaire.
   - Conclusion : pour tout $n \geq 1$, $P(n)$ est donc vraie.

   Pour tout $n \geq 1$, on a donc :
   $$\boxed{A^n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} A^2 \text{ si } n \text{ pair}, A^n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A \text{ sinon.}}$$

4. Pour n pair et strictement positif, on a
   $$AX_n = A^n X_0 = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} A^2 X_0 = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} A^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$
   On a donc
   $$\boxed{x_n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x_0, y_n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y_0, z_n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} x_0}$$
   De même, pour n impair, on a donc
   $$\boxed{x_n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y_0, y_n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x_0, z_n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y_0}.$$

Exercice 3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice M_a par
$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de M_a en fonction de a.
2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles M_a est inversible et calculer l'inverse dans ces cas.

Correction

1. Appliquons la méthode du pivot.

$$M_a|I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & -a & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & -a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

$L_3 \leftarrow L_3 - aL_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1+a^3 & a^2 & 1 & -a \end{array}\right).$$

On constate alors que la matrice M_a est de rang 3 si et seulement si $1+a^3 \neq 0$. Or $1+a^3 = (1+a)(1-a+a^2)$. a étant réel, et comme $1-a+a^2$ a pour discriminant $-3 < 0$, on en déduit que $(1-a+a^2) > 0$ pour tout a réel. On en déduit que :
— M_a est de rang 3 pour $a \neq -1$.
— M_a est de rang 2 pour $a = -1$.

2. M_a étant une matrice carrée de taille 3, elle est donc inversible si et seulement si M_a est de rang 3. D'après la question 1, on en déduit que M_a est inversible si et seulement si $a \neq -1$. Calculons l'inverse dans ce cas. On continue l'algorithme du pivot.

$L_2 \leftarrow L_2 + \frac{a^2}{1+a^3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a}{1+a^3} & \frac{a^2}{1+a^3} & \frac{1}{1+a^3} \\ 0 & 0 & 1+a^3 & a^2 & 1 & -a \end{array}\right).$$

$L1 \leftarrow L_1 - \frac{a}{1+a^3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1+a^3} & \frac{-a}{1+a^3} & \frac{a^2}{1+a^3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a}{1+a^3} & \frac{a^2}{1+a^3} & \frac{1}{1+a^3} \\ 0 & 0 & 1+a^3 & a^2 & 1 & -a \end{array}\right).$$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{1+a^3}L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1+a^3} & \frac{-a}{1+a^3} & \frac{a^2}{1+a^3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a}{1+a^3} & \frac{a^2}{1+a^3} & \frac{1}{1+a^3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a^2}{1+a^3} & \frac{1}{1+a^3} & \frac{-a}{1+a^3} \end{array}\right).$$

Pour $a \neq -1$, M_a est donc inversible, et

$$\boxed{M_a^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a^3} & \frac{-a}{1+a^3} & \frac{a^2}{1+a^3} \\ \frac{-a}{1+a^3} & \frac{a^2}{1+a^3} & \frac{1}{1+a^3} \\ \frac{a^2}{1+a^3} & \frac{1}{1+a^3} & \frac{-a}{1+a^3} \end{pmatrix}.}$$

Exercice 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{e^x} \ln(1+t^2)dt, g(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)dt$.

1. Justifier que les fonctions f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x).$$
3. En remarquant que $f = g \circ \exp$, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
4. En déduire les variations et les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f.
5. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$ et que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Correction

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{e^x} \ln(1+t^2)dt, g(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)dt$.

1. La fonction $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue (et même de classe C^1) sur $\mathbb{R}$ car composée de ln et d'un polynôme strictement positif sur $\mathbb{R}$. Soi $x \in \mathbb{R}$. L'intégrale de 0 à x de $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est donc bien définie. Autrement dit, $g(x)$ est bien définie.
   La fonction g est donc définie sur $\mathbb{R}$. f étant la composée de g avec la fonction exponentielle, on en déduit que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \ln(1+t^2)$ sont de classe C^1 sur $[0, x]$. On peut donc appliquer la formule d'intégration par parties et
$$\int_0^x u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x u(t)v'(t)dt.$$
   En remplaçant, on a donc
$$g(x) = [t\ln(1+t^2)]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}dt$$
   D'où
$$g(x) = x\ln(1+x^2) - \int_0^x 2dt + \int_0^x \frac{2}{1+t^2}dt.$$
   Donc
$$\boxed{g(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x).}$$
3. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de g et de la fonction exponentielle qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composée,
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g'(\exp(x))\exp(x).$$
   Or : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \ln(1+x^2)$. Donc
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(1+e^{2x})e^x.}$$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^{2x} > 0$. Donc $e^{2x} + 1 > 1$. D'où $\ln(1+e^{2x}) > 0$. Or $e^x > 0$. Donc $f'(x) > 0$. On en déduit que f' est strictement positive, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Déterminons les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
   On sait que $f = g \circ \exp$. Or $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. exp et g étant continues, par composition, on en déduit que $\lim_{-\infty} f = g(0) = 0$.
   Déterminons la limite de g en $+\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   On a
$$g(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\arctan(x).$$
   Or, par composition, $\lim_{x\to+\infty} 1 + x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
   On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$. Donc $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+x^2) = +\infty$. Or $\lim_{x\to+\infty} 2\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent,
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$
5. on sait que f est la composée de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Elle est donc strictement croissante et $\lim_{-\infty} f = 0, \lim_{+\infty} = +\infty$. Par conséquent, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$ et f^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5. Pour toute matrice matrice $K \in M_3(\mathbb{R})$, on définit le commutant de K par

$$C(K) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) | KM = MK\}.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^{-1}.
2. Exprimer $P^{-1}AP$ en fonction de D. En déduire une expression simplifiée de A^n en fonction de P, P^{-1}, D, n.
3. Montrer que $C(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \right\}$.
4. Montrer que $C(A) = \{PMP^{-1}, M \in C(D)\}$.

Correction

Pour toute matrice matrice $K \in M_3(\mathbb{R})$, on définit le commutant de K par

$$C(K) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) | KM = MK\}.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

1. On applique la méthode du pivot :

$$P|I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & -2 \end{array}\right).$$

$L_3 \leftarrow -2L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

P est donc inversible et

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.}$$

2. On a $P^{-1}AP = D$, donc $A = PDP^{-1}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP{-}1$.
   — Initialisation : $A^0 = I = PD^0P^{-1}$. Donc la propriété est vraie au rang 0.
   — Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ vraie. D'après $P(n)$, $A^n = PD^nP^{-1}$. Donc
   $$A^{n+1} = PD^nP^{-1}A = PD^nP^{-1}PDP^{-1}.$$
   Donc
   $$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$
   Donc $P(n+1)$ est vraie.
   — Conclusion : $\underline{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}.}$

3. Montrons que $C(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}$ par double inclusion.
   — Soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$. On a :
   $$MD = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, DM = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$$
   Donc $MD = DM$, donc $M \in C(D)$. On a bien $\underline{\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\} \subset C(D).}$
   — Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{pmatrix} \in C(D)$. On a
   $$MD = \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2i & j & k \end{pmatrix}, DM = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{pmatrix}$$
   Or, $MD = DM$. Donc $b = 2b, c = 2c, 2d = d, 2i = i$. Donc $b = c = d = i = 0$. Autrement dit, $M \in \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}$. Donc $C(D) \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}$

   Conclusion : d'après le principe de double inclusion, on a bien $\boxed{C(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}}$

4. Montrons que $C(A) = \{PMP^{-1}, M \in C(D)\}$ par double inclusion.
   — Soit $M \in C(A)$. On a
   $$\begin{aligned} PMP^{-1}A &= PMP^{-1}PDP^{-1} \\ &= PMDP^{-1} \\ &= PDMP^{-1} && (MD = DM) \\ &= PDP^{-1}PMP^{-1} \\ &= APMP^{-1}. \end{aligned}$$
   On a bien $PMP^{-1} \in C(A)$. On en déduit que $\{PMP^{-1}, M \in C(D)\} \subset C(A)$.
   — Soit $M \in C(A)$. On a donc $AM = MA$. Or
   $$A = PDP^1$$
   D'où
   $$PDP^{-1}M = MPDP^{-1}.$$
   Donc, en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, on obtient
   $$DP^{-1}MP = P^{-1}MPD.$$
   Donc $P^{-1}MP \in C(D)$. Donc M est bien de la forme $PM'P^{-1}$ avec $M' \in C(D)$. (ici, $M' = P^{-1}MP$).

D'après le principe de double inclusion, on en déduit que $\boxed{C(A) = \{PMP^{-1}, M \in C(D)\}}$.

Exercice 6. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $A = (1, 2)$ et $B = (-1, -1)$ deux points du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne pour les ensembles suivants :

   (a) $\{M \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}$. (b) $\{M \in \mathbb{R}^2, ||\overrightarrow{MA}|| - ||\overrightarrow{MB}|| = 0\}$.
2. Représenter ces deux ensembles dans un repère orthonormé.
3. Quelle est la nature (cercle, droite ou autre figure géométrique) de ces deux ensembles ? Dans le cas où on aurait une droite, déterminer une représentation paramétrique de celle-ci. Dans le cas où on aurait un cercle, déterminer le centre et le rayon.

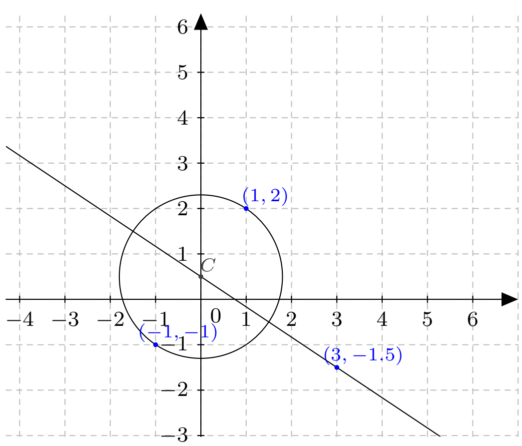
Correction

1. Déterminons $S_1 = \{M \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}$.
   Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} M \in S_1 & \Leftrightarrow & \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ & \Leftrightarrow & (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (x-1)(x+1) + (y-2)(y+1) = 0 \\ & \Leftrightarrow & x^2 - 1 + y^2 - y - 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & x^2 - 1 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \boxed{x^2 + (y - \dfrac{1}{2})^2 = \dfrac{13}{4}} \end{array}$$

   Déterminons $S_2 = \{M \in \mathbb{R}^2, ||\overrightarrow{MA}|| - ||\overrightarrow{MB}|| = 0\}$.
   Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcll} M \in S_2 & \Leftrightarrow & ||\overrightarrow{MA}|| - ||\overrightarrow{MB}|| = 0 & \\ & \Leftrightarrow & ||\overrightarrow{MA}|| = ||\overrightarrow{MB}|| & \\ & \Leftrightarrow & ||\overrightarrow{MA}||^2 = ||\overrightarrow{MB}||^2 & (||\overrightarrow{MA}|| \geq 0, ||\overrightarrow{MB}|| \geq 0) \\ & \Leftrightarrow & (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 & \\ & \Leftrightarrow & (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 & \\ & \Leftrightarrow & x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 & \\ & \Leftrightarrow & \boxed{-4x - 6y + 3 = 0} & \end{array}$$

2. 

3. S_1 est un cercle de centre $(0, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$.
   S_2 est une droite. Déterminons une représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & \frac{1}{2} - \frac{2}{3}t \end{array}}$$

   où t décrit $\mathbb{R}$.

Remarquons que S_1 est le cercle passant par A et B et de diamètre AB, et que S_2 est la médiatrice du segment $[A, B]$.