DS n^{o} 5 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Problème 1 (Analyse-Informatique)
Dans tout l'exercice, $\alpha \in]0,1]$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha}$$

1. (INFO) Écrire une fonction `SuiteS(n)` qui retourne la valeur de S_n. On suppose que α est contenu dans la variable a.
2. (a) Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
   (b) Montrer que $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
   (c) Déterminer la limite de $(S_{2n} - S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déduire des questions précédentes que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Dans la suite, on note ℓ_α la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. (INFO) À partir des questions précédentes, on en déduit l'algorithme d'approximation numérique ci-contre (voir l'encadré). Écrire une fonction `approx(epsilon)` qui exécute l'algorithme décrit.

```
 Pour epsilon>0 :
 S0=1
 S1=S0-(1/(2)**(a))
 k=2
 tant que (|S1-S0|>epsilon)
     S0=S1+(1/(k+1)**a)
     k=k+1
     S1=S0-(1/(k+1)**a)
     k=k+1
retourner [S1,S0]
```

4. Dans cette question, on fixe $\alpha = 1$ et on veut calculer ℓ_1.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k = \frac{x^{2n+2}}{1+x}$$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\ln(2) - S_{2n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x} dx$$
   (c) On rappelle que si f est une fonction continue et positive sur $[0,1]$ alors $\int_0^1 f(t)dt \geqslant 0$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$0 \leq \ln(2) - S_{2n+1} \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx.$$
   (d) Déduire des questions précédente la limite ℓ_1 de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) (INFO) À l'aide de résultats précédents, écrire une fonction `approxln2(epsilon)` qui retourne un encadrement du nombre $\ln(2)$ à ϵ près.

Exercice 1
On veut étudier la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}. \end{cases}$$

Pour tout $x \geq 0$, on pose $f(x) = \sqrt{x+3}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$ avec $x \geq 0$. On note L la solution correspondante.
2. Montrer que $f([0,L]) \subset [0,L]$.
3. Montrer que pour tout $y \geq x \geq 0$, on a
   $$0 \leq f(y) - f(x) \leq \frac{y-x}{2\sqrt{3}}.$$
   On pourra multiplier au numérateur et au dénominateur de $f(y) - f(x)$ par $\sqrt{y+3} + \sqrt{x+3}$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n \in [0,L] \text{ et } 0 \leq L - u_n \leq \frac{L}{(2\sqrt{3})^n}.$$
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Problème 2 (Algèbre-Géométrie, A faire sur une copie différente)

Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Pour tout ce problème, on fixe un point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et on note $H(\lambda, \mu, \nu)$ son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$.

1. (a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ contenant les points $B(-1, 0, 0)$, $C(2, 7, -3)$ et $D(-2, 4, 1)$.
   (b) Montrer que $\mathscr{P}_1$ contient $\mathscr{D}$.
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ contenant $\mathscr{D}$ et le point $E(-2, 3, -1)$.
   (d) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_3$ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par A.
2. En déduire que les coordonnées de H vérifient un système linéaire qu'on peut écrire sous la forme :

$$M_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = M_2 \quad \text{où} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } M_2 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ est une matrice colonne à déterminer.}$$

3. Montrer que M_1 est inversible et calculer son inverse.
4. En déduire que les coordonnées de H sont données par :

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_2 \quad \text{où} \quad P_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Déterminer en fonction de α, β et γ la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ du point $M(x, y, z) \in \mathscr{D}$ telle que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$.
   (b) Retrouver le résultat de la question 4 à l'aide de la valeur du paramètre t obtenue à la question précédente.
6. (a) À l'aide du résultat de la question 4, montrer que :

$$P_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} + P_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

   (b) Quelle est l'interprétation géométrique du résultat précédent ?
7. (a) On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$ qui vérifient la propriété suivante :

$$P_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + P_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{S}$$

   Résoudre (S) et en déduire que $\mathscr{S} = \mathscr{D}$.
   (b) Quelle est l'interprétation géométrique du résultat précédent ?

Exercice 2

On définit la famille de polynôme $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} T_0 &= 1 \\ T_1 &= X \\ \forall n \geq 1 \ T_{n+1} &= 2XT_n - T_{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré n et que pour tout $n \geq 1$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   On pourra effectuer une récurrence double (avec n et $n-1$).
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Montrer que $P = T_n$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$ avec $\theta \in [0, \pi[$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes une factorisation de T_n. On l'écrira sous la forme :

$$c \prod_{k=0}^{n-1} (X - a_k)$$

   où c est un constante et les a_k les racines de T_n.