DS n° 5 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Problème 1 (Analyse-Informatique)
Dans tout l'exercice, $\alpha \in]0,1]$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha}$$

1. (INFO) Écrire une fonction `SuiteS(n)` qui retourne la valeur de S_n. On suppose que α est contenu dans la variable a.

2. (a) Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
   (b) Montrer que $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
   (c) Déterminer la limite de $(S_{2n} - S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déduire des questions précédentes que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Dans la suite, on note ℓ_α la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. (INFO) À partir des questions précédentes, on en déduit l'algorithme d'approximation numérique ci-contre (voir l'encadré). Écrire une fonction `approx(epsilon)` qui exécute l'algorithme décrit.

```
 Pour epsilon>0 :
 S0=1
 S1=S0-(1/(2)**(a))
 k=2
 tant que (|S1-S0|>epsilon)
     S0=S1+(1/(k+1)**a)
     k=k+1
     S1=S0-(1/(k+1)**a)
     k=k+1
retourner [S1,S0]
```

4. Dans cette question, on fixe $\alpha = 1$ et on veut calculer ℓ_1.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k = \frac{x^{2n+2}}{1+x}$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(2) - S_{2n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x} dx$$

   (c) On rappelle que si f est une fonction continue et positive sur $[0,1]$ alors $\int_0^1 f(t)dt \geqslant 0$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \ln(2) - S_{2n+1} \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx.$$

   (d) Déduire des questions précédente la limite ℓ_1 de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) (INFO) À l'aide de résultats précédents, écrire une fonction `approxln2(epsilon)` qui retourne un encadrement du nombre $\ln(2)$ à ϵ près.

Correction

Dans tout l'exercice, $\alpha \in]0,1]$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha}$$

1.
```
def suiteS(n) :
    S=0
    for i in range(n+1) :
        S=S+((-1)**i)/(i+1)**a
    return S
```

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} \\ &= S_{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+2)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+3)^\alpha} - S_{2n} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+2)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+3)^\alpha} \\ &= \frac{-1}{(2n+2)^\alpha} + \frac{1}{(2n+3)^\alpha}. \end{aligned}$$

Or $\alpha > 0$. Donc $(2n+3)^\alpha \geq (2n+2)^\alpha > 0$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que

$$\frac{1}{(2n+3)^\alpha} \leq \frac{1}{(2n+2)^\alpha}.$$

On a donc

$$\frac{1}{(2n+3)^\alpha} - \frac{1}{(2n+2)^\alpha} \leq 0.$$

Autrement dit, $S_{2n+2} - S_{2n} \leq 0$.
Conclusion : la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} \\ &= S_{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+3)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+4)^\alpha} - S_{2n+1} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+3)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+4)^\alpha} \\ &= \frac{1}{(2n+3)^\alpha} - \frac{1}{(2n+4)^\alpha}. \end{aligned}$$

Or $\alpha > 0$. Donc par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que $\frac{1}{(2n+3)^\alpha} \geq \frac{1}{(2n+4)^\alpha}$. On a donc $\frac{1}{(2n+3)^\alpha} - \frac{1}{(2n+4)^\alpha} \geq 0$.
Autrement dit, $S_{2n+3} - S_{2n+1} \geq 0$.
Conclusion : la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= S_{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+2)^\alpha} - S_{2n} \\ &= -\frac{1}{(2n+2)^\alpha} \end{aligned}$$

Or $\alpha > 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} (2n+2)^\alpha = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{(2n+2)^\alpha} = 0$.
Autrement dit, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0}$.

(d) En résumé :
— la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (question 1.a) ;
— la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (question 1.b) ;
— la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle ;
ces deux suites sont donc adjacentes. Il en résulte qu'elles convergent vers la même limite. Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et (S_{2n+1}) ayant même limite, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3.
```
def approx(epsilon) :
    S0=1
    S1=1-(1/(2**a))
    k=2
    while (abs(S1-S0)>epsilon) :
        S0=S1+(1/(k+1)**a)
        k=k+1
        S1=S0-(1/(k+1)**a)
        k=k+1
    return [S1,S0]
```

4. (a) Soit $x \in [0,1]$. On a

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{2n+1} (-x)^k$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$ ($-x \in [-1,0]$) donc

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k = \frac{1-(-x)^{2n+2}}{1-(-x)}$$

Autrement dit,

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k = \frac{1-(x)^{2n+2}}{1+x)}$$

On a donc

$$\boxed{\frac{x^{2n+2}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 4.a, on sait que

$$\forall x \in [0,1], \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k = x^k \frac{x^{2n+2}}{1+x}.$$

Les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k$ et $g : x^k \frac{x^{2n+2}}{1+x}$ étant obtenues comme sommes et quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$, on en déduit qu'elles sont continues sur $[0,1]$ et donc intégrables sur ce segment. En intégrant, on obtient alors :

$$\int_0^1 (\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k) dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x} dx.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \int_0^1 x^k dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x} dx.$$

En calculant les intégrales du membre droit, on obtient

$$[\ln(1+x)]_{x=0}^{x=1} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k [\frac{x^{k+1}}{k+1}]_{x=0}^{x=1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x} dx.$$

D'où

$$\ln(2) - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x} dx.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\ln(2) - S_{2n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x} dx.}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : x \mapsto \frac{x^{2n+2}}{1+x}$. Cette fonction étant un quotient de polynôme dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$ elle y est continue. De plus, sur $[0,1]$ le numérateur et dénominateur sont positifs. On en déduit que

$$\int_0^1 f_n(x) dx \geq 0.$$

D'après la question 4.b, on en déduit que

$$\underline{\ln(2) - S_{2n+1} \geq 0.}$$

Posons $g : x \mapsto x^{2n+2}$. g est continue sur $[0,1]$ car polynomiale. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) - f_n(x) = x^{2n+2} - \frac{x^{2n+2}}{1+x} = \frac{x^{2n+3}}{1+x} \geq 0$.Par conséquent, $g - f_n$ est positive sur $[0,1]$ et y est continue comme différence de fonctions continues sur ce segment. Il en résulte que

$$\int_0^1 (g - f_n)(x) dx \geq 0.$$

D'où
$$\int_0^1 g(x)dx \geq \int_0^1 f_n(x)dx.$$
Autrement dit,
$$\underline{\int_0^1 x^{2n+2}dx \geq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x}dx = \ln(2) - S_{2n+1}.}$$
On a bien
$$\boxed{0 \leq \ln(2) - S_{2n+1} \leq \int_0^1 x^{2n+2}dx.}$$
On rappelle que si f est une fonction continue et positive sur $[0,1]$ alors $\int_0^1 f(t)dt \geqslant 0$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$0 \leq \ln(2) - S_{2n+1} \leq \int_0^1 x^{2n+2}dx.$$

(d) D'après la question 4.c, on a
$$0 \leq \ln(2) - S_{2n+1} \leq \int_0^1 x^{2n+2}dx.$$
En calculant l'intégrale, on a alors :
$$0 \leq \ln(2) - S_{2n+1} \leq \frac{1}{2n+3}.$$
Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$ et d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(\ln(2) - S_{2n+1}) = 0$. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \ln(2)$.
D'après la question 1.d, on sait que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Elle converge donc vers la même limite que $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
Par conséquent,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)}.$$

(e)
```
def approxln2(epsilon) :
          S0=1
          S1=1-(1/2)
          k=2
          while (abs(S1-S0)>epsilon) :
              S0=S1+(1/(k+1))
              k=k+1
              S1=S0-(1/(k+1))
              k=k+1
          return [S1,S0]
```

Exercice 1

On veut étudier la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 &= 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n+3}. \end{cases}$$
Pour tout $x \geq 0$, on pose $f(x) = \sqrt{x+3}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$ avec $x \geq 0$. On note L la solution correspondante.
2. Montrer que $f([0,L]) \subset [0,L]$.
3. Montrer que pour tout $y \geq x \geq 0$, on a
$$0 \leq f(y) - f(x) \leq \frac{y-x}{2\sqrt{3}}.$$
On pourra multiplier au numérateur et au dénominateur de $f(y) - f(x)$ par $\sqrt{y+3} + \sqrt{x+3}$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \in [0,L] \text{ et } 0 \leq L - u_n \leq \frac{L}{(2\sqrt{3})^n}.$$
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Correction

On veut étudier la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 &= 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n+3}. \end{cases}$$
Pour tout $x \geq 0$, on pose $f(x) = \sqrt{x+3}$.

1. Soit $x \geq 0$.
$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = x \\ &\Leftrightarrow (x+3) = x^2 \quad (x \geq 0) \\ &\Leftrightarrow 0 = x^2 - x - 3 \end{aligned}$$
On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 13$. Les solutions de cette équations sont donc $x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. On a donc
$$f(x) = x \Leftrightarrow x \in \{\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\} \text{ et } x \geq 0.$$
Par conséquent,
$$\boxed{S = \left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}.}$$
Dans la suite, $L = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

2. Soit $x \in [0, L]$. Par définition, on a
$$0 \leq x \leq L.$$
On a donc
$$3 \leq x + 3 \leq L + 3.$$
Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que
$$\sqrt{3} \leq \sqrt{x+3} \leq \sqrt{L+3}.$$
Mais d'après la question 1, $\sqrt{L+3} = L$. On a donc
$$0 \leq \sqrt{3} \leq f(x) \leq L.$$
On a bien $\boxed{f([0, L]) \subset [0, L].}$

3. Soit $y \geq x \geq 0$. On a
$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \sqrt{y+3} - \sqrt{x+3} \\ &= \frac{(\sqrt{y+3}-\sqrt{x+3})(\sqrt{y+3}+\sqrt{x+3})}{(\sqrt{y+3}+\sqrt{x+3})} \quad ((\sqrt{y+3}+\sqrt{x+3} > 0) \\ &= \frac{y+3-(x+3)}{(\sqrt{y+3}+\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{y-x}{(\sqrt{y+3}+\sqrt{x+3})} \end{aligned}$$
Or $y \geq 0, x \geq 0$. Donc $\sqrt{y+3} + \sqrt{x+3} \geq 2\sqrt{3} > 0$. On a donc
$$\frac{1}{\sqrt{y+3}+\sqrt{x+3}} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$
Et comme $y - x \geq 0$, il en résulte que
$$\frac{y-x}{\sqrt{y+3}+\sqrt{x+3}} \leq \frac{y-x}{2\sqrt{3}}.$$
Autrement dit, on a
$$\boxed{\frac{y-x}{\sqrt{y+3}+\sqrt{x+3}} \leq \frac{y-x}{2\sqrt{3}}.}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$P(n) : u_n \in [0, L], 0 \leq L - u_n \leq \frac{L}{(2\sqrt{3})^n}.$$
— Initialisation : $u_0 = 0$ donc $u_0 \in [0, L]$ et $L - u_0 = L \leq \frac{L}{(2\sqrt{3})^0}$.
$P(0)$ est donc vraie.
— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ vraie. Montrons que $P(n+1)$ vraie. D'après $P(n)$, $u_n \in [0, L]$. D'après la question 2, il en résulte que $f(u_n) \in [0, L]$. Autrement dit, $u_{n+1} \in [0, L]$. D'après $P(n)$, $0 \leq u_n \leq L$. D'après la question 3, on a donc
$$0 \leq f(L) - f(u_n) \leq \frac{L - u_n}{(2\sqrt{3}}$$
D'après $P(n)$, il en résulte que
$$0 \leq f(L) - f(u_n) \leq \frac{L}{(2\sqrt{3})^n(2\sqrt{3}}.$$
Or $f(L) = L$ (q.1). D'où
$$0 \leq L - f(u_n) \leq \frac{L}{(2\sqrt{3})^n(2\sqrt{3}}.$$
$P(n+1)$ est donc vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, L], 0 \leq L - u_n \leq \frac{L}{(2\sqrt{3})^n}.$$

— On a $(2\sqrt{3}) > 1$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{L}{(2\sqrt{3})^n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} L - u_n = 0$. Autrement dit,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}}.$$

5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Problème 2 (Algèbre-Géométrie, Corrigé de S. Godillon)

Énoncé 1

Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Pour tout ce problème, on fixe un point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et on note $H(\lambda, \mu, \nu)$ son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$.

1. (a) Déterminer une représentation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ contenant les points $B(-1, 0, 0)$, $C(2, 7, -3)$ et $D(-2, 4, 1)$.

Correction

On cherche un vecteur $\overrightarrow{n_1} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ normal au plan $\mathscr{P}_1$. Or les vecteurs $\overrightarrow{BC} = (3, 7, -3)$ et $\overrightarrow{BD} = (-1, 4, 1)$ ne sont pas colinéaires car :

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 19 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Ainsi $\overrightarrow{n_1} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ est normal au plan $\mathscr{P}_1$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{n_1} = 0 \\ \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{n_1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a + 7b - 3c = 0 \\ -a + 4b + c = 0 \quad L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3a + 7b - 3c = 0 \\ 19b = 0 \end{cases}.$$

On obtient un système de rang 2 avec une inconnue auxiliaire et aucune équation auxiliaire. Il y a donc une infinité de solutions de la forme :

$$\begin{cases} a = (3c - 7b)/3 = c \\ b = 0 \\ c = c \end{cases} \quad \text{où } c \in \mathbb{R} \text{ est un paramètre.}$$

Pour $c = 1$, on obtient le vecteur normal $\overrightarrow{n_1} = (1, 0, 1)$. Ainsi le plan $\mathscr{P}_1$ admet une représentation cartésienne de la forme :

$$\mathscr{P}_1 : ax + by + cz + d = x + z + d = 0 \quad \text{où } d \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Puisque $B(-1, 0, 0)$ appartient au plan $\mathscr{P}_1$, on en déduit que $-1 + 0 + d = 0$ donc que $d = 1$. Finalement, on obtient la représentation cartésienne :

$$\boxed{\mathscr{P}_1 : x + z + 1 = 0}.$$

On peut aussi écrire une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}_1$ (par exemple à l'aide des vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$) puis raisonner par substitution pour supprimer les deux paramètres d'une des trois équations obtenues.

(b) Montrer que $\mathscr{P}_1$ contient $\mathscr{D}$.

Correction

Soit $M(x, y, z) \in \mathscr{D}$. Il existe donc un paramètre $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = (-3 + t, 1 + 2t, 2 - t)$. Par conséquent :

$$x + z + 1 = (-3 + t) + (2 - t) + 1 = 0.$$

On en déduit que $M(x, y, z) \in \mathscr{P}_1$. Puisque ceci est vrai pour tout $M(x, y, z) \in \mathscr{D}$, on a démontré que :

$$\boxed{\mathscr{D} \subset \mathscr{P}_1}.$$

(c) Déterminer une représentation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ contenant $\mathscr{D}$ et le point $E(-2,3,-1)$.

Correction

On cherche un vecteur $\overrightarrow{n_2} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ normal au plan $\mathscr{P}_2$. La droite $\mathscr{D}$ passe par le point $F(-3,1,2)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1,2,-1)$. Or les vecteurs $\overrightarrow{EF} = (-1,-2,3)$ et $\overrightarrow{u} = (1,2,-1)$ ne sont pas colinéaires car :

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{matrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Ainsi $\overrightarrow{n_2} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ est normal au plan $\mathscr{P}_2$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{n_2} = 0 \\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{n_2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a - 2b + 3c = 0 \\ a + 2b - c = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -a - 2b + 3c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases}.$$

On obtient un système de rang 2 avec une inconnue auxiliaire et aucune équation auxiliaire. Il y a donc une infinité de solutions de la forme :

$$\begin{cases} a = a = -2b + 3c = -2b \\ b = b \\ c = 0 \end{cases} \quad \text{où } b \in \mathbb{R} \text{ est un paramètre.}$$

Pour $b = 1$, on obtient le vecteur normal $\overrightarrow{n_2} = (-2,1,0)$. Ainsi le plan $\mathscr{P}_2$ admet une représentation cartésienne de la forme :

$$\mathscr{P}_2 : ax + by + cz + d = -2x + y + d = 0 \quad \text{où } d \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Puisque $E(-2,3,-1)$ appartient au plan $\mathscr{P}_2$, on en déduit que $(-2)(-2)+3+d = 0$ donc que $d = -7$. Finalement, on obtient la représentation cartésienne :

$$\boxed{\mathscr{P}_2 : -2x + y - 7 = 0}.$$

On peut aussi écrire une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}_2$ (par exemple à l'aide des vecteurs directeurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{u}$) puis raisonner par substitution pour supprimer les deux paramètres d'une des trois équations obtenues.

(d) Déterminer une représentation cartésienne du plan $\mathscr{P}_3$ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par A.

Correction

La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1,2,-1)$ et est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}_3$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{u} = (1,2,-1)$ est normal au plan $\mathscr{P}_3$ qui admet une représentation cartésienne de la forme :

$$\mathscr{P}_3 : x + 2y - z + d = 0 \quad \text{où } d \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Puisque $A(\alpha,\beta,\gamma)$ appartient au plan $\mathscr{P}_3$, on en déduit que $\alpha + 2\beta - \gamma + d = 0$ donc que $d = -\alpha - 2\beta + \gamma$. Finalement, on obtient la représentation cartésienne :

$$\boxed{\mathscr{P}_3 : x + 2y - z - \alpha - 2\beta + \gamma = 0}.$$

2. En déduire que les coordonnées de H vérifient un système linéaire qu'on peut écrire sous la forme :

$$M_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = M_2 \text{ où } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ est une matrice colonne à déterminer.}$$

Correction

Puisque H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$, H appartient à la droite $\mathscr{D}$ et le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal à la droite $\mathscr{D}$. On en déduit que :

— H appartient au plan $\mathscr{P}_1$ car $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}_1$ d'après le résultat de la question 1(b) ;
— H appartient au plan $\mathscr{P}_2$ car $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}_2$ par définition de $\mathscr{P}_2$;
— H appartient au plan $\mathscr{P}_3$ car $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{P}_3$ par définition de $\mathscr{P}_3$.

Par conséquent, les coordonnées de $H(\lambda,\mu,\nu)$ vérifient les équations cartésiennes de $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda + \nu - 1 = 0 \\ -2\lambda + \mu - 7 = 0 \\ \lambda + 2\mu - \nu - \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} \lambda + \nu = -1 \\ -2\lambda + \mu = 7 \\ \lambda + 2\mu - \nu = \alpha + 2\beta - \gamma \end{cases}}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ \alpha + 2\beta - \gamma \end{pmatrix}$$
$$\iff M_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = M_2 \quad \text{où} \quad \boxed{M_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ \alpha + 2\beta - \gamma \end{pmatrix}}.$$

3. Montrer que M_1 est inversible et calculer son inverse.

Correction

On fixe $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ et on cherche $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{aligned}
M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_3 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\
&\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}}_{\text{rang}=3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_1 + y_2 \\ -5y_1 - 2y_2 + y_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 6L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 + L_3 \end{matrix}
\end{aligned}$$

On obtient une matrice équivalente échelonnée de rang maximal donc $\boxed{M_1 \text{ est inversible}}$.

$$\begin{aligned}
M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \\ -5y_1 - 2y_2 + y_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow L_2/3 \\ L_3 \leftarrow -L_3/6 \end{matrix} \\
&\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{I}_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_1 - 2y_2 + y_3)/6 \\ (y_1 + y_2 + y_3)/3 \\ -(-5y_1 - 2y_2 + y_3)/6 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ 5y_1 + 2y_2 - y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=M_1^{-1}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalement, l'inverse de la matrice M_1 est égal à :

$$\boxed{M_1^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}}.$$

4. En déduire que les coordonnées de H sont données par :

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_2 \quad \text{où} \quad P_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Correction

D'après les résultats des questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} &= \mathrm{I}_3 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = M_1^{-1} M_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = M_1^{-1} M_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ \alpha + 2\beta - \gamma \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -15 + \alpha + 2\beta - \gamma \\ 12 + 2\alpha + 4\beta - 2\gamma \\ 9 - \alpha - 2\beta + \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta - \gamma \\ 2\alpha + 4\beta - 2\gamma \\ -\alpha - 2\beta + \gamma \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -15 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{P_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_2}.
\end{aligned}$$

5. (a) Déterminer en fonction de α, β et γ la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ du point $M(x, y, z) \in \mathscr{D}$ telle que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$.

Correction

Soit $t \in \mathbb{R}$ le paramètre du point $M(x, y, z) \in \mathscr{D}$, donc $(x, y, z) = (-3 + t, 1 + 2t, 2 - t)$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = 0 &\iff \begin{pmatrix} -3+t-\alpha \\ 1+2t-\beta \\ 2-t-\gamma \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff (-3+t-\alpha) + 2(1+2t-\beta) - (2-t-\gamma) = 0 \\
&\iff -3+6t-\alpha-2\beta+\gamma = 0 \\
&\iff \boxed{t = \frac{1}{6}(\alpha+2\beta-\gamma+3)}.
\end{aligned}$$

(b) Retrouver le résultat de la question 4 à l'aide de la valeur du paramètre t obtenue à la question précédente.

Correction

Le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$ est directeur de la droite $\mathscr{D}$. Par conséquent, si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$, alors le point $M(x, y, z) \in \mathscr{D}$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$. On en déduit que les coordonnées de $H(\lambda, \mu, \nu)$ sont obtenues pour la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ calculée à la question précédente, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda = -3+t = -3+\frac{1}{6}(\alpha+2\beta-\gamma+3) = \frac{1}{6}(\alpha+2\beta-\gamma) - \frac{5}{2} \\ \mu = 1+2t = 1+\frac{1}{3}(\alpha+2\beta-\gamma+3) = \frac{1}{6}(2\alpha+4\beta-2\gamma) + \frac{4}{2} \\ \nu = 2-t = 2-\frac{1}{6}(\alpha+2\beta-\gamma+3) = \frac{1}{6}(-\alpha-2\beta+\gamma) + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{P_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_2}.$$

6. (a) À l'aide du résultat de la question 4, montrer que :

$$P_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} + P_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Correction

On a d'après le résultat de la question 4 :

$$P_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} + P_2 = P_1 \left(P_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_2 \right) + P_2 = P_1^2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_1P_2 + P_2.$$

Or :

$$P_1^2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & 12 & -6 \\ 12 & 24 & -12 \\ -6 & -12 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = P_1$$

et :

$$P_1P_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{3,1}.$$

Par conséquent :

$$P_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} + P_2 = P_1^2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_1P_2 + P_2 = P_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_2 = \boxed{\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}}$$

d'après le résultat de la question 4.

(b) Quelle est l'interprétation géométrique du résultat précédent ?

Correction

On sait d'après le résultat de la question 4 que les coordonnées du projeté orthogonal $H(\lambda, \mu, \nu)$ de $A(\alpha, \beta, \gamma)$ sur $\mathscr{D}$ sont données par :

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_2.$$

Ainsi, les coordonnées du projeté orthogonal de $H(\lambda, \mu, \nu)$ sur $\mathscr{D}$ sont égales à :

$$P_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} + P_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}$$

Le projeté orthogonal de H sur $\mathscr{D}$ est donc égal à H. Par conséquent, le projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$ du projeté orthogonal ou autrement dit projeter orthogonalement sur $\mathscr{D}$ deux fois de suite revient à ne le faire qu'une seule fois.

7. (a) On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$ qui vérifient la propriété suivante :

$$P_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + P_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{S}$$

Résoudre (S) et en déduire que $\mathscr{S} = \mathscr{D}$.

Correction

On a :

$$\begin{aligned}
\text{(S)} &\iff P_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + P_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \mathrm{I}_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&\iff \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 2 & -2 & -2 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{matrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(S)} &\iff \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -30 \\ 60 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
&\iff \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2
\end{aligned}$$

On obtient un système équivalent échelonné de rang 2 avec une inconnue auxiliaire et une équation auxiliaire compatible. Le système (S) a donc une infinité de solutions de la forme :

$$\boxed{\begin{cases} x = 9 - 2y - 5z = 9 - 2(5 - 2z) - 5z = -1 - z \\ y = -(-30 + 12z)/6 = 5 - 2z \\ z = z \end{cases} \quad \text{où } z \in \mathbb{R} \text{ est un paramètre}}.$$

On reconnaît la représentation paramétrique d'une droite de l'espace, donc l'ensemble $\mathscr{S}$ des points $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$ qui vérifient la propriété de l'énoncé est la droite passant par le point $G(-1, 5, 0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v} = (-1, -2, 1)$. On remarque que $\overrightarrow{v}$ est aussi un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ car $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1) = -\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. De plus, en prenant le paramètre $t = 2$, on obtient que le point $G(-3 + 2, 1 + 2 \times 2, 2 - 2)$ appartient aussi à la droite $\mathscr{D}$. Finalement, on en déduit que les droites $\mathscr{S}$ et $\mathscr{D}$ sont confondues, c'est-à-dire $\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{D}}$. *On peut aussi montrer que $\mathscr{S} = \mathscr{D}$ par double inclusion.*

(b) Quelle est l'interprétation géométrique du résultat précédent ?

Correction

On sait d'après le résultat de la question 4 que les coordonnées du projeté orthogonal $H(\lambda, \mu, \nu)$ de $A(\alpha, \beta, \gamma)$ sur $\mathscr{D}$ sont données par :

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P_2.$$

Ainsi, les coordonnées des points $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$ égaux à leur projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$ doivent vérifier le système (S). D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $\boxed{\text{la droite}}$ $\boxed{\mathscr{D} \text{ est égal à l'ensemble des points qui sont}}$ ou autrement dit $\boxed{\text{projeter orthogonalement sur } \mathscr{D} \text{ les points de } \mathscr{D}\text{, et seulement ceux-là, n'a aucun effet}}$.

Exercice 2

On définit la famille de polynôme $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} T_0 &= 1 \\ T_1 &= X \\ \forall n \geq 1 \; T_{n+1} &= 2XT_n - T_{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré n et que pour tout $n \geq 1$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   On pourra effectuer une récurrence double (avec n et $n-1$).
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Montrer que $P = T_n$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$ avec $\theta \in [0, \pi[$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes une factorisation de T_n. On l'écrira sous la forme :

$$c \prod_{k=0}^{n-1} (X - a_k)$$

   où c est un constante et les a_k les racines de T_n.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) : T_n \text{ est de degré } n, \text{ et si } n \geq 1 \text{ alors le coefficient dominant de } T_n \text{ est } 2^{n-1} \text{ et } T_{n-1} \text{ est de degré } n-1.$$

— Initialisation : pour $n = 0$, $T_0 = 1$ et est donc bien un polynôme de degré 0. n étant nul, n vérifie également la proposition “si $n \geq 1$ alors le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}”.
Pour $n = 1$, on a $T_1 = X$ donc son degré est bien et son coefficient dominant est bien $2^{1-1} = 1$.

— Hérédité : soit $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}.$$

D'après $P(n)$, T_n est de degré n et T_{n-1} est de degré $n-1$. Donc $2XT_n$ est de degré $n+1$ et d'après les propriétés sur le degré, on a

$$deg(T_{n+1}) = \max(deg(2XT_n), n-1) = n+1.$$

Dans la relation $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, on constate que le coefficient dominant de T_{n+1} est égal à $2a_n$, où a_n est le coefficient dominant de T_n. Or, d'après $P(n), a_n = 2^{n-1}$. On a bien $a_{n+1} = 2^n$, où a_{n+1} est le coefficient dominant de T_{n+1}. $P(n+1)$ est donc vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, deg(T_n) = n, \text{ si } n \geq 1, a_n = 2^{n-1}$$

où a_n est le coefficient dominant de T_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$. D'après les formules de trigonométries, on a

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) &= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) + \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ &= 2\cos(n\theta)\cos(\theta). \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$P(n) : \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta), T_{n-1}(\cos(\theta)) = \cos((n-1)\theta).$$

— Initialisation : Pour $n = 1$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a bien $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1\theta)$. $P(1)$ est donc vraie.

— Hérédité : soit $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ vraie. D'après $P(n)$, on a

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta), T_{n-1}(\cos(\theta) = \cos((n-1)\theta)).$$

Donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_{n+1}(\cos(\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$$

D'après la question 2, on en déduit que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \begin{aligned} T_{n+1}(\cos(\theta)) &= \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)).}$$

4. D'après la question 3, on a donc
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = P(\cos(\theta)).$$
Donc
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, (T_n - P)(\cos(\theta)) = 0$$
Or la fonction cos réalise une surjection de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$. Il en résulte que
$$\forall x \in [-1, 1] (T_n - P)(x) = 0.$$
Le polynôme $T_n - P$ a donc une infinité de racines. Il est donc nul. Par conséquent,
$$\boxed{P = T_n}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, cette équation n' pas de solution.
Pour $n \neq 0$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On sait que
$$\begin{aligned} \cos(n\theta) = 0 &\Leftrightarrow n\theta = \tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ &\Leftrightarrow \theta = \tfrac{\pi}{2n} + \tfrac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$
On a
$$\begin{aligned} 0 \leq \tfrac{\pi}{2n} + \tfrac{k\pi}{n} < \pi &\Leftrightarrow 0 \leq \tfrac{1}{2} + k < n \\ &\Leftrightarrow -\tfrac{1}{2} \leq k < n - \tfrac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow k \in [|0, n-1|] \end{aligned}$$
Les solutions sont donc $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ avec $k \in [|0, n-1|]$.
6. Soit $n \geq 1$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
Pour tout $k \in [[0, n-1|]$, on pose $\theta_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$, on a donc
$$T_n(\cos(\theta_k)) = \cos(n\theta_k) = 0.$$
La fonction cos réalisant une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, on en déduit que les $\cos(\theta_k)$ sont différents deux à deux. On a explicité n racines différents et ce polynôme étant de degré n, on en déduit que l'on a trouvé toutes les racines. De plus, on sait que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} pour $n \geq 1$. On en déduit que :
$$\boxed{T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - \cos(\frac{\pi + 2k\pi}{2n})).}$$