Devoir surveillé 6 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1 (Reprise de l'introduction de l'énoncé d'informatique)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que $[|0, n|]$ désigne l'ensemble $\{0, 1, \cdots, n\}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $E_n = \{0\} \times [|0, 1|] \times \cdots \times [|0, n-1|]$. Soit $(w_0, \cdots, w_{n-1})$ un élément de E_n, $k \in \{1, \cdots, n-1\}$, $i \in \{1, \cdots, n-1\}$. On dit que k est une valeur record en position i si $w_i = k$ et pour tout $j \in \{0, \cdots, i-1\}, w_j < k$. La position i est alors une position record pour la valeur k. On dit que k est une valeur record si k est un valeur record pour une certaine position i, et on dit que i est une position record si i est une position record pour une certaine valeur k.

Par exemple, si $w = (0, 1, 1, 0, 3, 2) \in E_6$, 1 est une valeur record pour la position 1, 3 est une valeur record pour la position 4, 1 est une position record pour la valeur 1, 4 est une position record pour la valeur 3. Les positions records de w sont exactement 1 et 4, les valeurs records sont exactement 1 et 3.

Ainsi, par convention, la position 0 n'est pas un record.

Soit $(w_0, \cdots, w_{n-1})$ un élément de E_n et $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ on dit que k est une valeur record stationnaire s'il existe $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ tel que $w_i = k$, i est une position record et pour tout $j > i, w_j = k$. Par exemple, si $w = (0, 0, 1, 0, 2, 2, 2, 2)$, on a $w \in E_8$ et 2 est une valeur record stationnaire. Si $w = (0, 0, 1, 0, 2, 3, 2, 4)$, 4 est une valeur record stationnaire. Si $w = (0, 0, 1, 2, 3, 2)$, w n'a pas de valeur record stationnaire.

Dans la suite, on munit E_n de la probabilité uniforme.

1. Soit $n \geq 1$. Déterminer le cardinal de E_n.
2. Déterminer tous les éléments de E_3.
3. Déterminer tous les éléments de E_7 ayant comme valeur record stationnaire 1.
4. (a) Déterminer la probabilité qu'un élément tiré au hasard de E_6 ait un record en position 2.
   (b) Déterminer la probabilité qu'un élément tiré au hasard de E_6 ait comme plus grande valeur record 2.
   (c) Déterminer la probabilité qu'un élément tiré au hasard de E_6 ait comme valeur record stationnaire 2 sachant que cet élément a comme plus grande valeur record 2.
5. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, $k \in \{1, \cdots, n-1\}$. On cherche à déterminer la probabilité de l'événement

$$A_n : \text{“la valeur } k \text{ est un record stationnaire”}.$$

   Pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, on pose

$$A_{n,i} : \text{“la valeur } k \text{ est un record stationnaire et } i \text{ est une position record avec } w_i = k\text{”}.$$

   (a) Justifier que pour tout $i < k$, $A_{n,i}$ est vide.
   (b) Montrer que $(A_{n,i})_{i \in \{1, \cdots, n-1\}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles.
   (c) Montrer que $A_n = \cup_{i=k}^{n-1} A_{n,i}$.
   (d) Soit $i \in \{k, \cdots, n-1\}$. Montrer que le cardinal de $A_{n,i}$ est égal à $k! k^{i-k}$.
   (e) Montrer que si $k = 1$ alors $p(A_n) = \frac{1}{(n-2)! n}$.
   (f) Montrer que si $k \in \{2, \cdots, n-1\}$ alors $p(A_n) = \frac{k!(k^{n-k} - 1)}{n!(k-1)}$.

Exercice 2. Une urne U_1 contient 5 boules vertes et 8 boules rouges. Une urne U_2 contient 3 boules vertes et 4 boules rouges. On considère l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur face, on tire trois boules de U_1 sans remise. Sinon, on tire trois boules de l'urne U_2 avec remise.

1. Sachant que les boules proviennent de l'urne U_1, déterminer la probabilité que la deuxième boule est verte.
2. Sachant que les boules proviennent de l'urne U_2, déterminer la probabilité que la deuxième boule est verte.

3. Sachant que la deuxième boule tirée est verte, déterminer la probabilité que cette boule provient de l'urne U_1.
4. Déterminer la probabilité que les trois boules soient vertes.

Exercice 3. Déterminer les limites si elles existent de :

1. $\frac{\sin(x^2)}{\cos(x)-1}$ en 0. 2. $\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{(e^x-1)\ln(1+2x)}$ en 0. 3. $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-(1+x^3)^{\frac{1}{3}}$ en $+\infty$ 4. $\frac{\lfloor 2x^3+x^2-1\rfloor}{x^3+x+1}$ en $+\infty$

Exercice 4. Déterminer des équivalents des fonctions suivantes sous la forme Cx^α :

1. $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ en 0. 2. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1$ en 0. 3. $\frac{\sin(x)(e^x-1)}{\tan(x)\ln(1+x)}$ en 0. 4. $(1+x)^{\frac{1}{3}}-(x-1)^{\frac{1}{3}}$ en $+\infty$.

Exercice 5. Pour tout $a\in\mathbb{R}$, on pose

$$M_a=\begin{pmatrix} 0 & a & 1\\ a & 0 & 1\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de M_a en fonction de la valeur du paramètre a.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M_a soit inversible.
3. Dans le cas où M_a est inversible, calculer son inverse.