Devoir surveillé 6 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1 (Reprise de l'introduction de l'énoncé d'informatique)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que $[|0, n|]$ désigne l'ensemble $\{0, 1, \cdots, n\}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $E_n = \{0\} \times [|0, 1|] \times \cdots \times [|0, n-1|]$. Soit $(w_0, \cdots, w_{n-1})$ un élément de E_n, $k \in \{1, \cdots, n-1\}$, $i \in \{1, \cdots, n-1\}$. On dit que k est une valeur record en position i si $w_i = k$ et pour tout $j \in \{0, \cdots, i-1\}, w_j < k$. La position i est alors une position record pour la valeur k. On dit que k est une valeur record si k est un valeur record pour une certaine position i, et on dit que i est une position record si i est une position record pour une certaine valeur k.

Par exemple, si $w = (0, 1, 1, 0, 3, 2) \in E_6$, 1 est une valeur record pour la position 1, 3 est une valeur record pour la position 4, 1 est une position record pour la valeur 1, 4 est une position record pour la valeur 3. Les positions records de w sont exactement 1 et 4, les valeurs records sont exactement 1 et 3.

Ainsi, par convention, la position 0 n'est pas un record.

Soit $(w_0, \cdots, w_{n-1})$ un élément de E_n et $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ on dit que k est une valeur record stationnaire s'il existe $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ tel que $w_i = k$, i est une position record et pour tout $j > i, w_j = k$. Par exemple, si $w = (0, 0, 1, 0, 2, 2, 2, 2)$, on a $w \in E_8$ et 2 est une valeur record stationnaire. Si $w = (0, 0, 1, 0, 2, 3, 2, 4)$, 4 est une valeur record stationnaire. Si $w = (0, 0, 1, 2, 3, 2)$, w n'a pas de valeur record stationnaire.

Dans la suite, on munit E_n de la probabilité uniforme.

1. Soit $n \geq 1$. Déterminer le cardinal de E_n.
2. Déterminer tous les éléments de E_3.
3. Déterminer tous les éléments de E_7 ayant comme valeur record stationnaire 1.
4. (a) Déterminer la probabilité qu'un élément tiré au hasard de E_6 ait un record en position 2.
   (b) Déterminer la probabilité qu'un élément tiré au hasard de E_6 ait comme plus grande valeur record 2.
   (c) Déterminer la probabilité qu'un élément tiré au hasard de E_6 ait comme valeur record stationnaire 2 sachant que cet élément a comme plus grande valeur record 2.
5. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, $k \in \{1, \cdots, n-1\}$. On cherche à déterminer la probabilité de l'événement

   $$A_n : \text{“la valeur } k \text{ est un record stationnaire”}.$$

   Pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, on pose

   $$A_{n,i} : \text{“la valeur } k \text{ est un record stationnaire et } i \text{ est une position record avec } w_i = k\text{”}.$$

   (a) Justifier que pour tout $i < k$, $A_{n,i}$ est vide.
   (b) Montrer que $(A_{n,i})_{i \in \{1, \cdots, n-1\}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles.
   (c) Montrer que $A_n = \cup_{i=k}^{n-1} A_{n,i}$.
   (d) Soit $i \in \{k, \cdots, n-1\}$. Montrer que le cardinal de $A_{n,i}$ est égal à $k! k^{i-k}$.
   (e) Montrer que si $k = 1$ alors $p(A_n) = \frac{1}{(n-2)! n}$.
   (f) Montrer que si $k \in \{2, \cdots, n-1\}$ alors $p(A_n) = \frac{k!(k^{n-k} - 1)}{n!(k-1)}$.

Correction

1. Soit $n \geq 1$. E_n étant le produit cartésien de n ensembles dont le i^{e} ensemble contient i éléments, on en déduit que

   $$\boxed{\operatorname{Card}(E_n) = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!.}$$

2. On a $\boxed{E_3 = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2)\}}$.

3. Par définition, les éléments $(0,1,1,1,1,1,1),(0,0,1,1,1,1,1),(0,0,0,1,1,1,1),(0,0,0,0,1,1,1),(0,0,0,0,0,1,1)$ et $(0,0,0,0,0,0,1)$ sont des éléments ayant un comme valeur record stationnaire. Réciproquement, soit $w = (w_0, w_1, \cdots, w_6)$ un élément ayant 1 comme valeur record stationnaire. Il existe donc un entier $i \in \{1, \cdots, 6\}$ tel que $w_i = 1$, pour tout $j > i, w_j = 1$ et pour tout $k < i, w_k < 1$ et donc $w_k = 0$. L'élément w est donc un des éléments présentés précédemment.

   Ainsi, l'ensemble des éléments de E_7 ayant comme valeurs records stationnaires est donné par

$$\boxed{\{(0,1,1,1,1,1,1),(0,0,1,1,1,1,1),(0,0,0,1,1,1,1),(0,0,0,0,1,1,1),(0,0,0,0,0,1,1),(0,0,0,0,0,0,1)\}}.$$

4. (a) E_6 étant muni de la probabilité uniforme, pour déterminer la probabilité de l'événement A="il y a un record en position 2", il suffit de déterminer le cardinal de cet événement. Montrons que

$$A = \{(0,0,1,a,b,c),(a,b,c) \in [|0,3|]\times[|0,4|]\times[|0,5|]\} \cup \{(0,d,2,a,b,c),(d,a,b,c) \in [|0,1|]\times[|0,3|]\times[|0,4|]\times[|0,5|]\}$$

   par double inclusion. On note B l'ensemble de droite. ($\supset$) Constatons que les éléments de B ont 2 comme position record. Réciproquement, soit $w \in A$.
   — Cas 1 : $w_2 = 1$. 2 étant une position record, on en déduit que $w_0 = w_1 = 0$. Donc $w \in B$.
   — cas 2 : $w_2 = 2$. par définition des éléments de E_6, $w_0 < 2, w_1 < 2$. Donc w est un élément de B.
   D'après le principe de double inclusion, on en déduit que $A = B$. B étant la réunion de deux ensembles disjoints de cardinaux respectifs $4 \times 5 \times 6$ et $2 \times 4 \times 5 \times 6$, on en déduit que $\text{Card}(A) = \frac{6!}{2}$.
   Donc

$$\boxed{P(A) = \frac{6!}{2 \cdot 6!} = \frac{1}{2}.}$$

   (b) On pose VR="la plus grand valeur record est 2". Soit w un élément de VR. Notons i le premier rang où apparaît 2. 2 étant une valeur record, on en déduit que pour tout $j < i$, $w_j < 2$. Les valeurs possibles pour w_j sont donc $0, 1$. 2 étant la plus grande valeur record, on en déduit que pour $j > i$, les valeurs possibles pour w_j sont $0, 1, 2$. Ainsi, en notant

$$VR_i = \{(w_0, \cdots, w_i = 2, w_{i+1}, \cdots, w_5), w_0 = 0, w_1 \in \{0,1\}, w_{i-1} \in \{0,1\}, w_{i+1} \in \{0,1,2\}, \cdots, w_{n-1} \in \{0,1,2\}\}$$

   on en déduit que $VR \subset \cup_{i=2}^{n-1} VR_i$. Réciproquement, un élément d'un VR_i a clairement comme plus grande valeur record 2. On a donc $VR = \cup_{i=2}^{5} VR_i$.
   Les VR_i étant disjoints 2 à 2, on en déduit que

$$\text{Card}(VR) = \sum_{i=2}^{5} \text{Card}(VR_i) = 2 \cdot 3^3 + 2^2 \cdots 3^2 + 2^3 \cdot 3 + 2^4 = 54 + 36 + 24 + 16 = 90 + 40 = 130.$$

   Donc

$$\boxed{P(VR) = \frac{130}{6!} = \frac{13}{72}}.$$

   (c) Déterminons les éléments ayant comme valeur record stationnaire 2. Par définition, ce sont exactement les éléments qui s'écrivent sous la forme $(0,a,2,2,2,2)$ ou $(0,a,b,2,2,2)$ ou $(0,a,b,c,2,2)$ ou $(0,a,b,c,d,2)$ avec a,b,c,d des éléments de $\{0,1\}$. On en déduit que le cardinal de cet ensemble est égal $2+4+8+16 = 30$. Par conséquent, en notant $RS2$ l'événement 2 est un record stationnaire, on obtient

$$P(RS2) = \frac{30}{720} = \frac{1}{24}.$$

   Constatons que si 2 est un valeur record stationnaire, alors 2 est aussi une plus grande valeur record. On a donc $RS2 \subset VR$ et

$$\boxed{P(RS2|VR) = \frac{P(RS2)}{P(VR)} = \frac{72}{24 \cdot 13} = \frac{3}{13}}.$$

5. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, $k \in \{1, \cdots, n-1\}$. On cherche à déterminer la probabilité de l'événement

$$A_n : \text{“la valeur } k \text{ est un record stationnaire”}.$$

   Pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, on pose

$A_{n,i}$: "la valeur k est un record stationnaire et i est une position record avec $w_i = k$".

(a) Soit $w \in E_n$ et $i < k$. Par définition, $w_i \in [0, i-1]$ donc w_i ne peut pas être égal à k. Donc w n'est pas un élément de $A_{n,i}$. Donc $A_{n,i}$ est vide.

(b) Soit $i < j$. Soit $w \in A_{n,i}$. Montrons que w n'est pas un élément de $A_{n,j}$. Par définition de $A_{n,i}$, $w_i = k$, $w_j = k$ et pour tout $l < i$, $w_i < k$. On en déduit que $j > i$ n'est pas une position record ($w_i = w_j$) et donc w n'est pas un élément de $A_{n,j}$. Les $(A_{n,i})$ sont donc disjoints deux à deux.

(c) Par définition des $A_{n,i}$, on a $\cup_{i=k}^{n-1} A_{n,i} \subset A_n$. Réciproquement, soit $w \in A_n$. Par définition, il existe $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ tel que $w_i = k$, i est une position record et pour tout $j > i, w_j = k$. On a alors $w \in A_{n,i}$. Donc $w \in \cup_{i=1}^{n-1} A_{n,i} \subset A_n = \cup_{i=k}^{n-1} A_{n,i}$. D'après le principe de double inclusion, on en déduit que

$$\boxed{A_n = \cup_{i=k}^{n-1} A_{n,i}.}$$

(d) On fixe $i \in \{k, \cdots, n-1\}$. Soit w un élément de $A_{n,i}$ il s'écrit sous la forme

$$(0, w_1, \cdots, w_{k-1}, w_k, \cdots, w_{i-1}, w_i = k, k, \cdots, w_{n-1} = k)$$

avec $w_1 \in [|0, 1|], \cdots, w_{k-1} \in [|0, k-1|], w_k \in [|0, k-1], w_{i-1} \in [|0, k-1|]$.
Réciproquement, un tel élément s'écrivant sous la forme précédente est un élément de $A_{n,i}$. Ainsi, $A_{n,i}$ est caractérisé par un produit cartésien de i ensembles, dont les k premiers sont de cardinaux respectifs $1, 2, \cdots, k$ et les $i-k$ suivants de cardinaux $i-k$. Donc $A_{n,i}$ est de cardinal $k!k^{i-k}$.

(e) Déterminons le cardinal de A_n dans le cas où $k = 1$. On sait que $A_n = \cup_{i=1}^{n-1} A_{n,i}$. Les $A_{n,i}$ étant disjoints deux à deux, on a donc

$$\text{Card}(A_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Card}(A_{n,i}) = \sum_{k=1}^{n-1} 1 = (n-1).$$

E_n étant muni de la probabilité uniforme, on en déduit que

$$\boxed{P(A_n) = \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-2)!n}}.$$

(f) En effectuant le même raisonnement que dans la question précédente, on obtient

$$\text{Card}(A_n) = \sum_{i=k}^{n-1} k!k^{i-k} = k! \sum_{i=k}^{n-1} k^{i-k}.$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $k \neq 1$. On a alors

$$\text{Card}(A_n) = k! \frac{k^{n-k} - 1}{k-1}.$$

E_n étant muni de la probabilité uniforme, on en déduit que

$$\boxed{P(A_n) = \frac{k!(k^{n-k} - 1)}{n!(k-1)}}.$$

Exercice 2. Une urne U_1 contient 5 boules vertes et 8 boules rouges. Une urne U_2 contient 3 boules vertes et 4 boules rouges. On considère l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur face, on tire trois boules de U_1 sans remise. Sinon, on tire trois boules de l'urne U_2 avec remise.

1. Sachant que les boules proviennent de l'urne U_1, déterminer la probabilité que la deuxième boule est verte.
2. Sachant que les boules proviennent de l'urne U_2, déterminer la probabilité que la deuxième boule est verte.
3. Sachant que la deuxième boule tirée est verte, déterminer la probabilité que cette boule provient de l'urne U_1.
4. Déterminer la probabilité que les trois boules soient vertes.

Correction

1. Notons respectivement $V1$ et $R1$ les événements “la première boule est verte” et “la première boule est rouge”. $V1$ et $R1$ formant un système complet d'événements, on a donc

$$\begin{array}{rcll} P(V2|U1) & = & P(V1\cap V2|U1)+P(R1\cap V2|U1) & \\ & = & P(V1|U1)P(V2|V1,U1)+P(R1|U1)P(V2|U1,R1) & \text{(formule des probabilités composées)} \\ & = & \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}+\frac{8}{13}\cdot\frac{5}{12} & \text{(tirage sans remise)} \\ & = & \frac{60}{13\cdot 12} & \\ & = & \boxed{\dfrac{5}{13}} & \end{array}$$

2. En effectuant un calcul similaire au précédent, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} P(V2|U2) & = & P(V1\cap V2|U2)+P(R1\cap V2|U2) & \\ & = & P(V1|U2)P(V2|V1,U2)+P(R1|U2)P(V2|U2,R1) & \text{(formule des probabilités composées)} \\ & = & \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7} & \text{(tirage avec remise)} \\ & = & \frac{21}{49} & \\ & = & \boxed{\dfrac{3}{7}} & \end{array}$$

3. On veut calculer $P(U1|V2)$. On a

$$\begin{array}{rcll} P(U1|V2) & = & \frac{P(U1\cap V2)}{P(V2)} & \\ & = & \frac{P(U1)P(V2|U1}{P(V2\cap U1)+P(V2\cap U2)} & (U1,\ U2 \text{ forment un système complet d'événements}) \\ & = & \frac{P(U1)P(V2|U1)}{P(U1)P(V2|U1)+P(U2)P(V2|U2)} & \\ & = & \frac{\frac{1}{2}\frac{5}{13}}{\frac{1}{2}\frac{5}{13}+\frac{1}{2}\frac{3}{7}} & \\ & = & \frac{1}{1+\frac{3\cdot 13}{7\cdot 5}} & \\ & = & \boxed{\dfrac{35}{74}} & \end{array}$$

4. On veut déterminer la probabilité que les trois boules tirées soient vertes. $U1$ et $U2$ formant un système complet d'événements, on a donc

$$P((V1,V2,V3))=P(V1,V2,V3,U1)+P(V1,V2,V3,U2).$$

En appliquant la formule des probabilité composées, on obtient

$$\begin{array}{rcl} P((V1,V2,V3)) & = & P(U1)P(V1|U1)P(V2|V1,U1)P(V3|V2,V1,U1) \\ & = & +P(U2)P(V1|U2)P(V2|V1,U2)P(V3|V2,V1,U2). \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} P((V1,V2,V3)) & = & \frac{1}{2}\frac{5}{13}\frac{4}{12}\frac{3}{11}+\frac{1}{2}(\frac{3}{7})^3 \\ & = & \frac{(5\cdot 4\cdot 3\cdot 7^3+13\cdot 12\cdot 11)}{2\cdot 7^3\cdot 11\cdot 12\cdot 13} \\ & = & \boxed{\dfrac{929}{49049}} \end{array}$$

Exercice 3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose : $f(x)=\frac{-1}{48}x^{48}-\frac{x^{14}}{14}+x+1$.

On cherche à démontrer de deux façons différentes qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\leq f(c)$.

1. Méthode 1 :
   (a) f étant un polynôme, f est donc continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction f étant un polynôme, elle est donc équivalent aux infinis à son terme de plus haut degré. Ainsi,

$$f(x)\sim_{+\infty}-\frac{x^{48}}{48}, f(x)\sim_{-\infty}\frac{-x^{48}}{48}.$$

Mais $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^{48}}{48}=-\infty, \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^{48}}{48}=-\infty$.

Donc

$$\boxed{\lim_{-\infty}f=-\infty, \lim_{+\infty}f=-\infty.}$$

(c) f admettant $-\infty$ comme limite en $-\infty$, il existe $M_1 > 0$ tel que pour tout $x < -M_1$, on a $f(x) \leq 1$. De même, f admettant $-\infty$ comme limite en $+\infty$, il existe $M_2 > 0$ tel que pour tout $x > M_2$, on a $f(x) \leq 1$. En posant $M = \max(M_1, M_2)$, on obtient alors

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \backslash [-M, M], f(x) \leq 1.}$$

(d) On sait que f est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $[-M, M]$. D'après le théorème des bornes atteintes, il existe $c \in [-M, M]$ tel que

$$\forall x \in [-M, M], f(x) \leq f(c).$$

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq f(c)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
— Cas 1 : $x \in [-M, M]$. Par construction de c, $f(x) \leq f(c)$.
— Cas 2 : $x \notin [-M, M]$. On a alors $f(x) \leq 1 = f(0) \leq f(c)$.
Par disjonction de cas, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(c).$$

2. Méthode 2 :

(a) La fonction f étant un polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est un polynôme qui est donc également dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc dérivable deux fois. De plus,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -x^{47} - x^{13} + 1, f"(x) = -47x^{46} - 13x^{12}}.$$

(b) f' étant un polynôme, elle est équivalente à son terme de plus haut degré $-x^{47}$ aux infinis. Mais $\lim_{x\to+\infty} -x^{47} = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} -x^{47} = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{-\infty} f = +\infty, \lim_{+\infty} f = -\infty.}$$

Constatons que $f"$ est négative et s'annule uniquement en 0. Par conséquent, f' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. En résumé,
— f' continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynômiale,
— $\lim_{-\infty} f = +\infty$, $\lim_{+\infty} f = -\infty$,
— f' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de la bijection continue, f' est réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et sa réciproque est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

(c) D'après la question précédente, on sait qu'il existe un unique $c_0 \in \mathbb{R}$ tel que f' est strictement négative sur $]c_0, +\infty[$, strictement positive sur $]-\infty, c[$ et $f'(c_0) = 0$.
Par conséquent, f est strictement croissante sur $]-\infty, c_0]$ et strictement décroissante sur $[c_0, +\infty[$.

(d) On garde les notations des questions précédentes. Soit $x \in \mathbb{R}$.
— Cas 1 : $x < c_0$. Par stricte croissance de f sur $]-\infty, c_0]$, $f(x) < f(c_0)$.
— Cas 2 : $x > c_0$. Par stricte décroissance de f sur $[c_0, +\infty[$, $f(x) < f(c_0)$.
— Cas 3 : $x = c_0$. On a alors $f(c_0) = f(x)$.
Par disjonctions de cas, on en déduit que c_0 est l'unique réel c tel que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(c).}$$

Correction

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \frac{-1}{48}x^{48} - \frac{x^{14}}{14} + x + 1$.

On cherche à démontrer de deux façons différentes qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(c)$.

1. Méthode 1 :

(a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ si elles existent.

(c) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash [-M, M], f(x) \leq 1.$$

(d) Montrer qu'il existe $c \in [-M, M]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(c).$$

2. Méthode 2 :
   (a) Justifier que f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et calculer f', f''.
   (b) En étudiant les limites de f' aux infinis et les variations de f', montrer que f réalise un bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire les variations de f.
   (d) En déduire qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(c).$$

Exercice 4. Déterminer les limites si elles existent de :

1. $\frac{\sin(x^2)}{\cos(x)-1}$ en 0. 2. $\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{(e^x-1)\ln(1+2x)}$ en 0. 3. $(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - (1+x^3)^{\frac{1}{3}}$ en $+\infty$ 4. $\frac{\lfloor 2x^3+x^2-1 \rfloor}{x^3+x+1}$ en $+\infty$

Correction

1. $\frac{\sin(x^2)}{\cos(x)-1} \sim_0 \frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}} \sim_0 -2$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{\cos(x)-1} = -2.}$$

2. $\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{(e^x-1)\ln(1+2x)} \sim_0 \frac{\frac{x^2}{4}}{x 2x} \sim_0 \frac{1}{8}$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{(e^x-1)\ln(1+2x)} = \frac{1}{8}}.$$

3. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} - (1+x^3)^{\frac{1}{3}} &= x\left((1+\tfrac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}} - (1+\tfrac{1}{x^3})^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= x\left((1+\tfrac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}} - 1 + 1 - (1+\tfrac{1}{x^3})^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= x\left((1+\tfrac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(1 + \frac{1-(1+\frac{1}{x^3})^{\frac{1}{3}}}{\left((1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}-1\right)}\right) \end{aligned}$$

Mais $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Donc

$$\frac{1-(1+\frac{1}{x^3})^{\frac{1}{3}}}{\left((1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}-1\right)} \sim_{+\infty} \frac{-\frac{1}{3x^3}}{\frac{1}{2x^2}} \sim_{+\infty} -\frac{2}{3x}$$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-(1+\frac{1}{x^3})^{\frac{1}{3}}}{\left((1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}-1\right)} = 0$.

On en déduit que

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - (1+x^3)^{\frac{1}{3}} \sim_{+\infty} x\frac{-1}{2x^2} \cdot 1 \sim_{+\infty} -\frac{1}{2x^2}.$$

Par conséquent, $\lim_{x \to +\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} - (1+x^3)^{\frac{1}{3}} = 0$.

4. Pour tout $x > 0$, on a

$$2x^3 + x^2 - 2 \leq \lfloor 2x^3 + x^2 - 1 \rfloor \leq 2x^3 + x^2 - 1$$

donc

$$\frac{2x^3+x^2-2}{x^3+x+1} \leq \frac{\lfloor 2x^3+x^2-1 \rfloor}{x^3+x+1} \leq \frac{2x^3+x^2-1}{x^3+x+1}.$$

Or $\frac{2x^3+x^2-2}{x^3+x+1} \sim_{+\infty} \frac{2x^3}{x^3} \sim_{+\infty} 2$ et $\frac{2x^3+x^2-1}{x^3+x+1} \sim_{+\infty} \frac{2x^3}{x^3} \sim_{+\infty} 2$. autrement dit, $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3+x^2-2}{x^3+x+1} = 2$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3+x^2-1}{x^3+x+1} = 2$. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim x \to +\infty \frac{\lfloor 2x^3+x^2-1 \rfloor}{x^3+x+1} = 2}.$$

Exercice 5. Déterminer des équivalents des fonctions suivantes sous la forme Cx^α :

1. $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ en 0. 2. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1$ en 0. 3. $\frac{\sin(x)(e^x-1)}{\tan(x)\ln(1+x)}$ en 0. 4. $(1+x)^{\frac{1}{3}}-(x-1)^{\frac{1}{3}}$ en $+\infty$.

Correction

Déterminer des équivalents des fonctions suivantes sous la forme Cx^α :

1. $\frac{e^x-e^{-x}}{2} = e^{-x}(\frac{e^{2x}-1}{2}) \sim_0 1\frac{2x}{2} \sim_0 x$. On a donc
$$\boxed{\frac{e^x-e^{-x}}{2} \sim_0 x}.$$
2. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1 = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}-2) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{-x}{2}})^2$. Mais d'après la question précédente,
$$(e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{-x}{2}}) \sim_0 2\frac{x}{2} \sim_0 x.$$
Donc
$$\boxed{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1 \sim_0 \frac{x^2}{2}}.$$
3. $\frac{\sin(x)(e^x-1)}{\tan(x)\ln(1+x)} \sim_0 \frac{x^2}{x^2} \sim_0 1$.
4. On a
$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{3}}-(x-1)^{\frac{1}{3}} &= x^{\frac{1}{3}}\left((\tfrac{1}{x}+1)^{\frac{1}{3}}-(1-\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{3}}\right)\\ &= x^{\frac{1}{3}}\left((\tfrac{1}{x}+1)^{\frac{1}{3}}-1+1-(1-\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{3}}\right)\\ &= x^{\frac{1}{3}}((\tfrac{1}{x}+1)^{\frac{1}{3}}-1)\left(1+\frac{1-(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}}{(\frac{1}{x}+1)^{\frac{1}{3}}-1}\right)\end{aligned}$$
Mais $\frac{1-(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}}{(\frac{1}{x}+1)^{\frac{1}{3}}-1} \sim_{+\infty} \frac{\frac{1}{3}x}{\frac{1}{3}x} \sim 1$
Donc $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1-(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}}{(\frac{1}{x}+1)^{\frac{1}{3}}-1}\right) = 2$. De plus, $((\frac{1}{x}+1)^{\frac{1}{3}}-1) \sim_{+\infty} \frac{1}{3x}$. Par conséquent,
$$\boxed{(1+x)^{\frac{1}{3}}-(x-1)^{\frac{1}{3}} \sim_{+\infty} \frac{2x^{\frac{-2}{3}}}{3}}.$$

Exercice 6. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose
$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & 1\\ a & 0 & 1\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de M_a en fonction de la valeur du paramètre a.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M_a soit inversible.
3. Dans le cas où M_a est inversible, calculer son inverse.

Correction

1. Échelonnons la matrice M_a :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & a & 1 & 1 & 0 & 0\\ a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & a & 1 & 1 & 0 & 0\\ a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)$$
$L_2 \leftrightarrow L_1$ puis $L_2 \leftrightarrow L_3$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+a & 1 & a & -a \end{array}\right)$$

On constate alors que pour $a = 0$ et $a = -1$, le rang de M_a est de 2. si $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1\}$, la matrice est de rang 3.

2. La matrice étant carrée de taille 3, elle est inversible si et seulement si elle est de rang 3. On en déduit que M_a est inversible si et seulement si $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1\}$.
3. Pour inverser la matrice, on suppose $a \neq 0, -1$ et on poursuit le calcul de la question 1. $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{a+1}L_3, L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{a+1}L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & \frac{-1}{a+1} & \frac{1}{a+1} & \frac{a}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+1} & \frac{-1}{a+1} & \frac{1}{a+1} \\ 0 & 0 & 1+a & 1 & a & -a \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow \frac{L_3}{1+a}, L_1 \leftarrow \frac{L_1}{a}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} & \frac{1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+1} & \frac{-1}{a+1} & \frac{1}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1} & \frac{a}{a+1} & \frac{-a}{a+1} \end{array}\right)$$

On a donc

$$\boxed{M_a^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} & \frac{1}{a+1} \\ \frac{1}{a+1} & \frac{-1}{a+1} & \frac{1}{a+1} \\ \frac{1}{a+1} & \frac{a}{a+1} & \frac{-a}{a+1} \end{pmatrix}}.$$