DS n° 7 de mathématiques

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Exercice

On note E l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{C}^5$ dont les composantes vérifient :

$$z_1 + iz_2 - 2z_3 + iz_4 + z_5 = 0$$

et on pose :

$$F = \Big\{(2i\sigma, -\sigma + i\rho, i\tau, -2\rho + 2i\sigma, 3\rho + i\sigma) \mid (\rho, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^3\Big\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^5$.
2. On pose $\overrightarrow{w_1} = (1, i, 1, 0, 2)$ et $\overrightarrow{w_2} = (i, 0, -1, 2i, -i)$.
   (a) Montrer que $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est une famille libre.
   (b) Montrer que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E$.
   (c) $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est-elle une famille génératrice de E ? Justifier.
3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^5$.
4. (a) Déterminer trois vecteurs $\overrightarrow{w_3}$, $\overrightarrow{w_4}$ et $\overrightarrow{w_5}$ tels que $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5})$.
   (b) $(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5})$ est-elle une famille libre ? Justifier.
   (c) Que peut-on déduire des résultats des deux questions précédentes ?
5. Que peut-on dire de l'ensemble $E \cap F$?
6. Montrer que $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est une base de $E \cap F$.

Problème

Ce problème propose d'étudier une mutation dynamique de l'information génétique au sein d'une lignée de cellules. Pour simplifier les notations, on désigne par A, B, C et D les quatre parties du génome touchées par la mutation. On observe les résultats suivants :

— la mutation ne touche qu'une seule partie du génome de chaque cellule à chaque génération ;

— si la mutation touche A alors elle touche équiprobablement A, B, C ou D à la génération suivante ;

— si la mutation touche B alors elle touche équiprobablement A ou D à la génération suivante ;

— si la mutation touche C alors elle touche équiprobablement B ou C à la génération suivante ;

— si la mutation touche D alors elle continue de toucher D à la génération suivante.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute lettre $X \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$, on note X_n l'événement : «la mutation touche X à la n-ième génération» et x_n sa probabilité. Enfin, on suppose que la mutation touche A à la première génération, c'est-à-dire $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = d_1 = 0$.

1. Déterminer a_2, b_2, c_2 et d_2.
2. Calculer la probabilité que la mutation touche A à la 2$^{\text{e}}$ génération sachant qu'elle touche D à la 3$^{\text{e}}$.
3. Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 1$.
   (a) Que peut-on dire de la somme $a_n + b_n + c_n + d_n$? Justifier.
   (b) Montrer que $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$. Obtenir des expressions similaires pour b_{n+1}, c_{n+1} et d_{n+1}.
   (c) En déduire que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ où L est une matrice à exprimer en fonction de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
5. (a) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.
   (b) Montrer que $P^{-1}MP = D + N$ où D est une matrice diagonale et N est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) Calculer DN, ND et N^2.
   (d) En déduire que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
6. On fixe un entier $n \geqslant 3$ dans cette question. À l'aide des résultats précédents, montrer que
$$L^{n-1} = \frac{4}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
   puis en déduire des expressions de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de l'entier $n \geqslant 3$.
7. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de la probabilité que la mutation touche A à la n-ième génération sachant qu'elle touche D à la $(n+1)$-ième génération.

Devoir surveillé 7 mathématiques et informatique

BCPST 1 2017-2018

— Durée : 3 heures.

— Documents et calculatrice non autorisés.

— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

1 Problème

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^7 + 21x^2 + 21x + 1.$$

Propriétés de la fonction P

1) Justifier que P est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer P' et P".
2) Déterminer les limites de P, P', P" aux infinis.
3) Montrer que P" s'annule en un unique réel r. On donnera une valeur explicite de r.
4) Montrer que P' admet comme minimum global -14.
5) En déduire que P' s'annule exactement 2 fois.
6) En déduire les variations de P.
7) Montrer que P a exactement trois racines réelles $\alpha < \gamma < \beta$ situées dans le segment $[-2, 0]$. On explicitera uniquement la valeur de γ.
8) Déterminer le nombre exact d'extrema locaux de P et montrer qu'ils sont tous atteints en des points de l'intervalle $[-2, 0]$.

Dans toute la suite, α désigne la plus petite racine réelle de P et β la plus grande racine réelle de P.

Approximation de réels : par dichotomie On rappelle l'algorithme de dichotomie suivant : On considère le segment $[a, b]$ et on pose $a_0 = a, b_0 = b$. On suppose que $P(a) \leq 0, P(b) > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\begin{array}{lll} a_{n+1} = a_n & b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } P(a_n)P(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, & b_{n+1} = b_n & \text{sinon} \end{array}$$

9) (INFO) Écrire une fonction Python `dicho(a,b,n)` qui retourne la liste $[a_n, b_n]$.
10) (INFO) Quelle est la valeur de a_n lorsque l'on exécute la commande `dicho(-1,0,10)` ?
11) (INFO) Écrire une fonction Python `dichoUn(a,b,e)` qui retourne la liste $[a_n, b_n]$ avec $|a_n - b_n| \leq e$.
12) (INFO) Écrire une fonction Python `dichoDeux(a,b,e)` qui retourne la liste $[a_n, b_n]$ avec $|a_n - b_n| \leq e$ dans le cas où $P(a) > 0, P(b) \leq 0$.
13) (INFO) Déterminer des valeurs a, b, e telles que `dichoUn(a,b,e)` ou `dichoDeux(a,b,e)` fournit un encadrement de α à 10^{-15} près. Déterminer de même des valeurs a, b, e pour obtenir un encadrement de β à 10^{-10} près. On veillera à choisir la bonne fonction parmi les deux. On pourra s'aider des valeurs suivantes :

$$P(-1.5) \approx -0.33 \quad P(-1.25) \approx 2.79 \quad P(-0.8) \approx -2.57 \quad P(-0.5) \approx -4.26 \quad P(0) = 1.$$

Approximation de réels : méthode de Newton On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}.$$

On veut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et est convergente vers un réel à déterminer.

14) On cherche à prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in]\beta, 0]$.
    (a) Justifier que $u_0 \in]\beta, 0]$.
    (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in]\beta, 0]$. Justifier que $P(u_n) \geq 0, P'(u_n) > 0$.
    (c) Montrer qu'il existe $c_n \in]\beta, u_n[$ tel que $P'(c_n)(u_n - \beta) = P(u_n)$.
    (d) En déduire que $u_{n+1} - \beta = (u_n - \beta)\left(1 - \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)}\right)$.
    (e) À l'aide de la stricte croissance de P' sur $[\beta, 0]$, montrer que $u_{n+1} > \beta$.
    (f) Conclure.
15) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel que l'on note l.
16) Montrer que la suite $(P'(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif.
17) En déduire que $l = \beta$.
18) On considère une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite comme à la question 14. Elle vérifie alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n \in]\beta, u_n[, P'(c_n)(u_n - \beta) = P(u_n).$$

    Montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.
19) En déduire que la suite $(u_{n+1} - \beta)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(u_n - \beta)_{n\in\mathbb{N}}$.