Devoir surveillé 7 mathématiques et informatique

BCPST 1 2017-2018

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

1 Problème

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^7 + 21x^2 + 21x + 1.$$

Propriétés de la fonction P

1) Justifier que P est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer P' et P".
2) Déterminer les limites de P, P', P" aux infinis.
3) Montrer que P" s'annule en un unique réel r. On donnera une valeur explicite de r.
4) Montrer que P' admet comme minimum global -14.
5) En déduire que P' s'annule exactement 2 fois.
6) En déduire les variations de P.
7) Montrer que P a exactement trois racines réelles $\alpha < \gamma < \beta$ situées dans le segment $[-2, 0]$. On explicitera uniquement la valeur de γ.
8) Déterminer le nombre exact d'extrema locaux de P et montrer qu'ils sont tous atteints en des points de l'intervalle $[-2, 0]$.

Dans toute la suite, α désigne la plus petite racine réelle de P et β la plus grande racine réelle de P.

Correction

1. La fonction P étant polynomiale, elle est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = 7x^6 + 42x + 21, P\text{"}(x) = 42x^5 + 42.}$$

2. Les fonctions P, P', P" étant polynomiales, elles sont équivalentes aux infinis à leur terme de plus haut degré. Ainsi,

$$P(x) \sim_{x\to+\infty} x^7, \quad P'(x) \sim_{x\to+\infty} 7x^6, \quad P\text{"}(x) \sim_{x\to+\infty} 42x^5$$
$$P(x) \sim_{x\to-\infty} x^7, \quad P'(x) \sim_{x\to-\infty} 7x^6, \quad P\text{"}(x) \sim_{x\to-\infty} 42x^5.$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} x^7 = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} 7x^6 = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} 42x^5 = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^7 = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} 7x^6 = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} 42x^5 = -\infty.$$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{lll} \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty, & \lim_{x\to+\infty} P'(x) = +\infty, & \lim_{x\to+\infty} P\text{"}(x) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty, & \lim_{x\to-\infty} P'(x) = +\infty, & \lim_{x\to-\infty} P\text{"}(x) = -\infty. \end{array}}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P"(x) = 42(x^5+1)$. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{array}{rcll} x < y & \Rightarrow & x^5 < y^5 & \text{(stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^5 \text{ sur } \mathbb{R}) \\ & \Rightarrow & x^5+1 < y^5+1 & \\ & \Rightarrow & 42(x^5+1) < 42(y^5+1) & (42>0) \\ & \Rightarrow & P"(x) < P"(y) & \end{array}$$

La fonction $P"$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, elle est injective. Il existe donc au plus un réel r tel que $P"(r) = 0$. Or $P"(-1) = 42((-1)+1) = 0$. Donc -1 est l'unique réel racine de $P"$.

4. D'après la question 3, on sait que $P"$ est strictement croissante et s'annule uniquement en -1. On en déduit que $P"$ est strictement négative sur $]-\infty,-1[$, strictement positive sur $]-1,+\infty[$ et nulle en -1. Ainsi, P' est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$. Il en résulte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) \geq P'(-1).$$

Mais $P'(-1) = 7 - 42 + 21 = -14$. -14 est bien le minimum global de P'.

5. D'après les questions précédentes, on sait que :
   - P' est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$;
   - P' est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur ces deux intervalles ;
   - $\lim_{-\infty} P' = +\infty$, $P'(-1) = -14 < 0, \lim_{+\infty} P' = +\infty$;

   donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe un unique $a \in]-\infty,-1[$ et un unique $b \in]-1,+\infty[$ tels que $P'(a) = 0, P'(b) = 0$.
   Ainsi, P' s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}$: une fois en a et une fois en b.

6. D'après les questions précédentes, on sait que P' est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$, strictement croissante sur $[-1,+\infty[$. De plus, en gardant les notations précédentes, on sait que $P'(a) = 0, P'(b) = 0$, avec $a \in]-\infty,-1[$ et $b \in]-1,+\infty[$. On en déduit que : P' est positive sur $]-\infty,a]$, négative sur $[a,b]$ et positive sur $[b,+\infty[$. De plus, P' ne s'annule qu'en a et b. Il en résulte que :
   - P est strictement croissante sur $]-\infty,a]$
   - P est strictement décroissante sur $[a,b]$
   - P est strictement croissante sur $[b,+\infty[$.

   Dans la suite, on note a la racine comprise entre $]-1,+\infty[$ de P' et on note b la racine comprise entre $]-1,+\infty[$.
   En raisonnant de la même manière que précédemment, et en constatant que $P(-2) = -7\cdot 64 - 42\times 2 + 21 < 0$ et que $P(0) = 1 > 0$, on en déduit $a \in]-2,-1[$ et $b \in]-1,0[$.

7. On sait que P est strictement décroissante sur $[a,b]$, et $-1 \in]a,b[$. Donc :

$$P(a) > P(-1) > P(b).$$

   Mais $P(-1) = 0$. On en déduit que $P(a) > 0$ et $P(b) < 0$. De plus, on a trouvé une unique racine sur $[a,b]$. P étant continue et strictement croissante sur $]-\infty,a]$ et comme $\lim_{-\infty} P = -\infty$ et $P(a) > 0$, on en déduit qu'il existe un unique $\alpha \in]-\infty,a]$ tel que $P(\alpha) = 0$.
   De même, P est strictement croissante et continue sur $[b,+\infty[$, $\lim_{+\infty} P = +\infty$, $P(b) < 0$. Donc il existe un unique $\beta \in [b,+\infty[$ tel que $P(\beta) = 0$.
   Ainsi, P a exactement 3 racines, $\alpha < -1 < \beta$. Montrons que α et β sont dans l'intervalle $[-2,0]$. On a $P(-2) < 0$ et $P(0) > 0$. Par stricte croissance de P sur $]-\infty,a]$ et sur $[b,+\infty[$, et comme $-2 < a$ et $b < 0$ et que l'on a $P(-2) < 0, P(0) > 0$, il en résulte que $\alpha \in [-2,-1]$ et que $\beta \in [-1,0]$.

8. En résumé, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	α	a	-1	b	β	0	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	-85	0	$P(a)$	0	$P(b)$	0	1	$+\infty$

D'après les variations de P, on constate que P admet exactement deux extrema locaux atteints en a et b qui sont dans l'intervalle $[-2,0]$.

Approximation de réels : par dichotomie On rappelle l'algorithme de dichotomie suivant : On considère le segment $[a, b]$ et on pose $a_0 = a, b_0 = b$. On suppose que $P(a) \leq 0, P(b) > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\begin{array}{lll} a_{n+1} = a_n & b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } P(a_n)P(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, & b_{n+1} = b_n & \text{sinon} \end{array}$$

9) (INFO) Écrire une fonction Python `dicho(a,b,n)` qui retourne la liste $[a_n, b_n]$.
10) (INFO) Quelle est la valeur de a_n lorsque l'on exécute la commande `dicho(-1,0,10)` ?
11) (INFO) Écrire une fonction Python `dichoUn(a,b,e)` qui retourne la liste $[a_n, b_n]$ avec $|a_n - b_n| \leq e$.
12) (INFO) Écrire une fonction Python `dichoDeux(a,b,e)` qui retourne la liste $[a_n, b_n]$ avec $|a_n - b_n| \leq e$ dans le cas où $P(a) > 0, P(b) \leq 0$.
13) (INFO) Déterminer des valeurs a, b, e telles que `dichoUn(a,b,e)` ou `dichoDeux(a,b,e)` fournit un encadrement de α à 10^{-15} près. Déterminer de même des valeurs a, b, e pour obtenir un encadrement de β à 10^{-10} près. On veillera à choisir la bonne fonction parmi les deux. On pourra s'aider des valeurs suivantes :

$$P(-1.5) \approx -0.33 \quad P(-1.25) \approx 2.79 \quad P(-0.8) \approx -2.57 \quad P(-0.5) \approx -4.26 \quad P(0) = 1.$$

Correction

9)
```
def P(x) :
    return x**7+21*x**2+21*x+1
 def dicho(a,b,n) :
     for i in range (n) :
         c=(a+b)/2
         if P(a)*P(c)<=0 :
             b=c
         else :
             a=c
     return [a,b]
```

10) On constate que la valeur de a n'est jamais modifié, donc $a = -1$.

11)
```
def dichoUn(a,b,e) :
     while abs(a-b)>e :
         c=(a+b)/2
         if P(a)*P(c)<=0 :
             b=c
         else :
             a=c
     return [a,b]
```

12) (INFO) Écrire une fonction Python `dichoDeux(a,b,e)` qui retourne la liste $[a_n, b_n]$ avec $|a_n - b_n| \leq e$ dans le cas où $P(a) > 0, P(b) \leq 0$.

```
def dichoDeux(a,b,e) :
     if P(a)>0 and P(b)<=0 :
         while abs(a-b)>e :
             c=(a+b)/2
             if P(c)>0 :
                 a=c
             else :
                 b=c
         return [a,b]
     else :
         print("pas les bonnes conditions")
         return
```

13) Pour α, on exécute la commande `dichoUn(-1.5,-1.25,10**(-10))` et pour β on exécute la commande `dichoUn(-1.5,-1.25,10**(-15))`

Approximation de réels : méthode de Newton On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}.$$

On veut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et est convergente vers un réel à déterminer.

14) On cherche à prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in]\beta, 0]$.
    (a) Justifier que $u_0 \in]\beta, 0]$.
    (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in]\beta, 0]$. Justifier que $P(u_n) \geq 0, P'(u_n) > 0$.
    (c) Montrer qu'il existe $c_n \in]\beta, u_n[$ tel que $P'(c_n)(u_n - \beta) = P(u_n)$.
    (d) En déduire que $u_{n+1} - \beta = (u_n - \beta)\left(1 - \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)}\right)$.
    (e) À l'aide de la stricte croissance de P' sur $[\beta, 0]$, montrer que $u_{n+1} > \beta$.
    (f) Conclure.
15) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel que l'on note l.
16) Montrer que la suite $(P'(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif.
17) En déduire que $l = \beta$.
18) On considère une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite comme à la question 14. Elle vérifie alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n \in]\beta, u_n[, P'(c_n)(u_n - \beta) = P(u_n).$$

    Montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.
19) En déduire que la suite $(u_{n+1} - \beta)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(u_n - \beta)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

14) On cherche à prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in]\beta, 0]$.
    (a) On sait que $\beta < 0$, d'après l'étude de la fonction P. Par définition de u_0, on a $u_0 = 0$. Donc $u_0 \in]\beta, 0]$.
    (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in]\beta, 0]$. En reprenant les variations de P, on sait que P est strictement croissante sur $[\beta, +\infty[$ et P' est strictement positive sur cet intervalle. De plus, $P(\beta) = 0$. Il en résulte que $P(u_n) \geq 0$ et $P'(u_n) > 0$.
    (c) P étant polynomiale, on sait que P est continue sur $[\beta, u_n]$ et dérivable sur $]\beta, u_n[$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]\beta, u_n[$ tel que :

$$\frac{P(u_n) - P(\beta)}{u_n - \beta} = P'(c_n).$$

    Mais $P(\beta) = 0$. On a donc

$$\frac{P(u_n)}{u_n - \beta} = P'(c_n).$$

    D'où :

$$\boxed{P(u_n) = P'(c_n)(u_n - \beta).}$$

    (d) Par définition, on a

$$u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}.$$

    Donc

$$u_{n+1} - \beta = u_n - \beta - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}.$$

    D'après la question 14.b, on a $P(u_n) = P'(c_n)(u_n - \beta)$. Donc

$$u_{n+1} - \beta = u_n - \beta - \frac{P'(c_n)(u_n - \beta)}{P'(u_n)}.$$

    En factorisant, on obtient

$$u_{n+1} - \beta = (u_n - \beta)(1 - \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)}).$$

(e) La fonction P' étant strictement croissante sur $[\beta, 0]$ et positive sur cet intervalle, et comme $c_n < u_n$, on en déduit que $\frac{P'(c_n)}{P'(u_n)} < 1$. Donc

$$(1 - \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)}) > 0.$$

Or $(u_n - \beta) > 0$ d'après $P(n)$. Donc

$$(u_n - \beta)(1 - \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)}) > 0.$$

Autrement dit,

$$u_{n+1} - \beta > 0.$$

(f) En résumé :

— on a prouvé dans a que $u_0 \in]\beta, 0]$,

— les question de b à e permettent de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \in]\beta, 0]$ alors $u_{n+1} \in]\beta, 0]$.

Donc, d'après le principe de récurrence, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]\beta, 0].}$$

15) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{P(u_n)}{P'(u_n)}.$$

Or $u_n \in]\beta, 0]$. Donc d'après les variations de P et de P', on a $P(u_n) > 0, P'(u_n) > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante. De plus, la suite est minorée par β. Donc la suite est convergente vers une certaine limite que l'on note l.

16) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq \beta$. En passant à la limite, on en déduit que $l \geq \beta$. La fonction P' étant polynomiale, on en déduit qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc $\lim_{n \to +\infty} P'(u_n) = P'(l)$. Comme P' est strictement croissante sur $[\beta, +\infty[$, que $P'(\beta) > 0$, et que $l \geq \beta$ on en déduit que $P'(l) > 0$. On a bien

$$\lim_{n \to +\infty} P'(u_n) > 0.$$

17) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}$. On a donc

$$u_{n+1} P'(u_n) = u_n P'(u_n) - P(u_n).$$

P et P' étant continues sur $\mathbb{R}$, en passant à la limite et par composition, on obtient :

$$lP'(l) = lP'(l) - P(l).$$

On en déduit que $P(l) = 0$. Donc l est une racine réelle de P. Or β est la plus grande racine de P. Donc $l \leq \beta$. Mais $l \geq \beta$. Par conséquent,

$$\boxed{l = \beta}.$$

18) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\beta < c_n < u_n$. Or $\lim_{n \to +\infty} u_n = \beta$. Donc d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} c_n = \beta$.

19) On construit une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la même façon que précédemment. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 14, on a :

$$u_{n+1} - \beta = (u_n - \beta)(1 - \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)})$$

On sait que la suite $(u_n - \beta)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule jamais. On a donc

$$\frac{u_{n+1} - \beta}{u_n - \beta} = (1 - \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)})$$

On sait, d'après les questions précédentes, $\lim_{n \to +\infty} c_n = \beta$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = \beta$, et P' continue sur $\mathbb{R}$. Donc par composition des limites, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} P'(c_n) = P'(\beta), \lim_{n \to +\infty} P'(u_n) = P'(\beta),$$

Or $P'(\beta) \neq 0$. Donc, par quotient, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)} = 1.$$

Il en résulte que

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{P'(c_n)}{P'(u_n)} = 0.$$

Autrement dit, le quotient $\frac{u_{n+1}-\beta}{u_n-\beta}$ a donc pour limite 0 lorsque $n \to +\infty$. Ce qui signigfie bien que la suite $(u_{n+1} - \beta)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(u_n - \beta)_{n\in\mathbb{N}}$.

Corrigé du DS n° 7 de mathématiques

Exercice

On note E l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{C}^5$ dont les composantes vérifient :

$$z_1 + iz_2 - 2z_3 + iz_4 + z_5 = 0$$

et on pose :

$$F = \Big\{ (2i\sigma, -\sigma + i\rho, i\tau, -2\rho + 2i\sigma, 3\rho + i\sigma) \mid (\rho, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^3 \Big\}.$$

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^5$.*

   ▶ D'une part, on a $\overrightarrow{0} = (0,0,0,0,0) \in E$ car $0 + i \times 0 - 2 \times 0 + i \times 0 + 0 = 0$.
   D'autre part, montrons que $\lambda \overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' \in E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\overrightarrow{z} \in E$ et $\overrightarrow{z}' \in E$. On fixe donc un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ et deux vecteurs $\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in E$ et $\overrightarrow{z}' = (z_1', z_2', z_3', z_4', z_5') \in E$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda \overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' &= \lambda(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) + (z_1', z_2', z_3', z_4', z_5') \\ &= (\lambda z_1 + z_1', \lambda z_2 + z_2', \lambda z_3 + z_3', \lambda z_4 + z_4', \lambda z_5 + z_5'). \end{aligned}$$

   Or :

$$\begin{aligned} &(\lambda z_1 + z_1') + i(\lambda z_2 + z_2') - 2(\lambda z_3 + z_3') + i(\lambda z_4 + z_4') + (\lambda z_5 + z_5') \\ =&\lambda \underbrace{(z_1 + iz_2 - 2z_3 + iz_4 + z_5)}_{=0 \quad \text{car } \overrightarrow{z} \in E} + \underbrace{(z_1' + iz_2' - 2z_3' + iz_4' + z_5')}_{=0 \quad \text{car } \overrightarrow{z}' \in E} \\ =&\lambda \times 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

   On en déduit que $\lambda \overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' \in E$ et ceci est vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\overrightarrow{z} \in E$ et $\overrightarrow{z}' \in E$.
   Finalement, on a bien montré que $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^5}$.

2. *On pose $\overrightarrow{w_1} = (1, i, 1, 0, 2)$ et $\overrightarrow{w_2} = (i, 0, -1, 2i, -i)$.*

   (a) *Montrer que $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est une famille libre.*

   ▶ On résout l'équation $\lambda_1 \overrightarrow{w_1} + \lambda_2 \overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{0}$ d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \overrightarrow{w_1} + \lambda_2 \overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{0} &\iff \lambda_1(1, i, 1, 0, 2) + \lambda_2(i, 0, -1, 2i, -i) = (0,0,0,0,0) \\ &\iff (\lambda + i\lambda_2, i\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2, 2i\lambda_2, 2\lambda_1 - i\lambda_2) = (0,0,0,0,0) \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ i & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2i \\ 2 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - iL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1-i \\ 0 & 2i \\ 0 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + (1+i)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2iL_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 3iL_2 \end{array} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient un système linéaire échelonné homogène de rang 2 avec trois équations auxiliaires compatibles et aucun inconnue auxiliaire. L'équation a donc une unique solution $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$. Par conséquent, $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \text{ est libre}}$.

(b) *Montrer que* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E$.

► Soit $\overrightarrow{z} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$. Par définition du sous-espace vectoriel engendré, $\overrightarrow{z}$ est égal à une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$. Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\overrightarrow{z} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2}$. Or $\overrightarrow{w_1} = (1, i, 1, 0, 2) \in E$ car $1 + i \times i - 2 \times 1 + i \times 0 + 2 = 0$ et $\overrightarrow{w_2} = (i, 0, -1, 2i, -i) \in E$ car $i + i \times 0 - 2 \times (-1) + i \times 2i + (-i) = 0$. De plus, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^5$ d'après le résultat de la question 1. Par conséquent, $\overrightarrow{z} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} \in E$ car toute combinaison linéaire de vecteurs d'un sous-espace vectoriel appartient à ce sous-espace vectoriel. Ainsi $\overrightarrow{z} \in E$ et ceci est vrai pour tout $\overrightarrow{z} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$. On en déduit que $\boxed{\mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E}$.

(c) $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ *est-elle une famille génératrice de* E *? Justifier.*

► La famille $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est génératrice de E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$. On a déjà montré l'inclusion $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E$ à la question précédente. Il reste donc à montrer l'inclusion $E \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$.

Soit $\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in E$ donc $z_1 + iz_2 - 2z_3 + iz_4 + z_5 = 0$. On a $\overrightarrow{z} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\overrightarrow{z} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2}$. On cherche donc à résoudre cette équation d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$
\begin{aligned}
& \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{z} \\
\iff & \lambda_1(1, i, 1, 0, 2) + \lambda_2(i, 0, -1, 2i, -i) = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ i & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2i \\ 2 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - iL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_1 \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1-i \\ 0 & 2i \\ 0 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 - iz_1 \\ z_3 - z_1 \\ z_4 \\ z_5 - 2z_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + (1+i)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2iL_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 3iL_2 \end{matrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 - iz_1 \\ z_3 - z_1 + (1+i)(z_2 - iz_1) \\ z_4 - 2i(z_2 - iz_1) \\ z_5 - 2z_1 + 3i(z_2 - iz_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ -iz_1 + z_2 \\ -iz_1 + (1+i)z_2 + z_3 \\ -2z_1 - 2iz_2 + z_4 \\ z_1 + 3iz_2 + z_5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang 2 avec trois équations auxiliaires et aucune inconnue auxiliaire. Si l'un de ces équations auxiliaires n'est pas compatible alors le système n'a pas de solutions. Par exemple, si on choisit $\overrightarrow{z} = (1, 0, 0, 0, -1)$ alors on a bien $\overrightarrow{z} \in E$ car $1 + i \times 0 - 2 \times 0 + i \times 0 + (-1) = 0$ mais la troisième équation n'est pas compatible car $-i \times 1 + (1 + i) \times 0 + 0 = -i \neq 0$. Donc $\overrightarrow{z} = (1, 0, 0, 0, -1) \notin \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$.

On en déduit que $E \not\subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ donc que $\boxed{(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \text{ n'est pas une famille génératrice de } E}$.

Attention à votre choix du vecteur $\overrightarrow{z}$ tel que l'une des trois équations auxiliaires ne soit pas compatible. Il faut aussi que $\overrightarrow{z} \in E$ pour que ce contre-exemple prouve bien que $E \not\subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$.

3. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}^5$.

► D'une part, on a $(2i \times 0, -0, -0 + i \times 0, i \times 0, -2 \times 0 + 2i \times 0, 3 \times 0 + i \times 0) = (0, 0, 0, 0, 0) = \overrightarrow{0} \in F$ en choisissant $\rho = \sigma = \tau = 0$.

D'autre part, on fixe un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ et deux vecteurs $\overrightarrow{z} = (2i\sigma, -\sigma+i\rho, i\tau, -2\rho+2i\sigma, 3\rho+i\sigma) \in F$ et $\overrightarrow{z}' = (2i\sigma', -\sigma'+i\rho', i\tau', -2\rho'+2i\sigma', 3\rho'+i\sigma') \in F$ où $(\rho,\sigma,\tau) \in \mathbb{C}^3$ et $(\rho',\sigma',\tau') \in \mathbb{C}^3$. Montrons que $\lambda\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' \in F$. On cherche donc $(\rho'',\sigma'',\tau'') \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\lambda\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' = \Big(2i\sigma'', -\sigma''+i\rho'', i\tau'', -2\rho''+2i\sigma'', 3\rho''+i\sigma''\Big).$$

Analyse. On a :

$$\begin{aligned}
&\lambda\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' \\
=&\lambda\Big(2i\sigma, -\sigma+i\rho, i\tau, -2\rho+2i\sigma, 3\rho+i\sigma\Big) + \Big(2i\sigma', -\sigma'+i\rho', i\tau', -2\rho'+2i\sigma', 3\rho'+i\sigma'\Big) \\
=&\Big(2i\lambda\sigma+2i\sigma', -\lambda\sigma+i\lambda\rho-\sigma'+i\rho', i\lambda\tau+i\tau', -2\lambda\rho+2i\lambda\sigma-2\rho'+2i\sigma', 3\lambda\rho+i\lambda\sigma+3\rho'+i\sigma'\Big) \\
=&\Big(2i\underbrace{(\lambda\sigma+\sigma')}_{=\sigma''}, -\underbrace{(\lambda\sigma+\sigma')}_{=\sigma''}+i\underbrace{(\lambda\rho+\rho')}_{=\rho''}, i\underbrace{(\lambda\tau+\tau')}_{=\tau''}, \\
&\qquad -2\underbrace{(\lambda\rho+\rho')}_{=\rho''}+2i\underbrace{(\lambda\sigma+\sigma')}_{=\sigma''}, 3\underbrace{(\lambda\rho+\rho')}_{=\rho''}+i\underbrace{(\lambda\sigma+\sigma')}_{=\sigma''}\Big).
\end{aligned}$$

Synthèse. On pose $\boxed{\rho'' = \lambda\rho+\rho'}$, $\boxed{\sigma'' = \lambda\sigma+\sigma'}$ et $\boxed{\tau'' = \lambda\tau+\tau'}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a bien trouvé $(\rho'',\sigma'',\tau'') \in \mathbb{C}^3$ tels que :

$$\lambda\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' = \Big(2i\sigma'', -\sigma''+i\rho'', i\tau'', -2\rho''+2i\sigma'', 3\rho''+i\sigma''\Big).$$

On en déduit que $\lambda\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z}' \in F$ et ceci est vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\overrightarrow{z} \in F$ et $\overrightarrow{z}' \in F$.

Finalement, on a bien montré que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^5}$.

4. (a) Déterminer trois vecteurs $\overrightarrow{w_3}$, $\overrightarrow{w_4}$ et $\overrightarrow{w_5}$ tels que $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5})$.

► On a :

$$\begin{aligned}
F &= \Big\{(2i\sigma, -\sigma+i\rho, i\tau, -2\rho+2i\sigma, 3\rho+i\sigma) \mid (\rho,\sigma,\tau) \in \mathbb{C}^3\Big\} \\
&= \Big\{\rho\underbrace{(0,i,0,-2,3)}_{=\overrightarrow{w_3}}+\sigma\underbrace{(2i,-1,0,2i,i)}_{=\overrightarrow{w_4}}+\tau\underbrace{(0,0,i,0,0)}_{=\overrightarrow{w_5}} \mid (\rho,\sigma,\tau) \in \mathbb{C}^3\Big\} \\
&= \Big\{\rho\overrightarrow{w_3}+\sigma\overrightarrow{w_4}+\tau\overrightarrow{w_5} \mid (\rho,\sigma,\tau) \in \mathbb{C}^3\Big\} \\
&= \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5}) \quad \text{par définition du sous-espace vectoriel engendré.}
\end{aligned}$$

D'où le résultat en posant $\boxed{\overrightarrow{w_3} = (0,i,0,-2,3)}$, $\boxed{\overrightarrow{w_4} = (2i,-1,0,2i,i)}$ et $\boxed{\overrightarrow{w_5} = (0,0,i,0,0)}$.

Il est bien sûr possible de trouver d'autres vecteurs pour $\overrightarrow{w_3}$, $\overrightarrow{w_4}$ et $\overrightarrow{w_5}$. En fait, toute famille de trois vecteurs génératrice de F convient.

(b) $(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5})$ est-elle une famille libre ? Justifier.

► On résout l'équation $\lambda_3\overrightarrow{w_3}+\lambda_4\overrightarrow{w_4}+\lambda_5\overrightarrow{w_5} = \overrightarrow{0}$ d'inconnues $(\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{aligned}
&\lambda_3\overrightarrow{w_3}+\lambda_4\overrightarrow{w_4}+\lambda_5\overrightarrow{w_5} = \overrightarrow{0} \\
\iff &\lambda_3(0,i,0,-2,3)+\lambda_4(2i,-1,0,2i,i)+\lambda_5(0,0,i,0,0) = (0,0,0,0,0) \\
\iff &(2i\lambda_4, i\lambda_3-\lambda_4, i\lambda_5, -2\lambda_3+2i\lambda_4, 3\lambda_3+i\lambda_4) = (0,0,0,0,0) \\
\iff &\begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -2 & 2i & 0 \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \text{ puis } L_1 \leftarrow -iL_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \end{array}
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -2 & 2i & 0 \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & \boxed{2i} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 4i & 0 \\ 0 & -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & \boxed{2i} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné homogène de rang 3 avec deux équations auxiliaires compatibles et aucune inconnue auxiliaire. Il y a donc une unique solution $(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (0, 0, 0)$. Par conséquent, $\boxed{\text{la famille } (\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5}) \text{ est libre}}$.

(c) Que peut-on déduire des résultats des deux questions précédentes ?

▶ D'après le résultat de la question 4(a), $F = \text{Vect}(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5})$ donc la famille $(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5})$ est génératrice de F. De plus, cette famille est libre d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent, $\boxed{(\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}, \overrightarrow{w_5}) \text{ est une base de } F}$ et $\boxed{\text{le sous-espace vectoriel } F \text{ est de dimension } 3}$.

5. *Que peut-on dire de l'ensemble $E \cap F$?*

▶ E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^5$ d'après les résultats des questions 1 et 3 respectivement. Donc $\boxed{E \cap F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^5}$ comme intersection de sous-espaces vectoriels.

6. *Montrer que $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est une base de $E \cap F$.*

▶ On a déjà montré que la famille $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est libre à la question 2(a). Il reste donc à montrer que cette famille est génératrice de $E \cap F$, c'est-à-dire que $E \cap F = \text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$. On raisonne par double inclusion.

$\underline{\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E \cap F}$. On a déjà montré que $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E$ à la question 2(b). Il suffit donc de montrer que $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset F$. Commençons par montrer que $\overrightarrow{w_1} = (1, i, 1, 0, 2) \in F$ et $\overrightarrow{w_2} = (i, 0, -1, 2i, -i) \in F$. On cherche donc $(\rho_1, \sigma_1, \tau_1) \in \mathbb{C}^3$ et $(\rho_2, \sigma_2, \tau_2) \in \mathbb{C}^3$ tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{w_1} = (2i\sigma_1, -\sigma_1 + i\rho_1, i\tau_1, -2\rho_1 + 2i\sigma_1, 3\rho_1 + i\sigma_1) \\ \overrightarrow{w_2} = (2i\sigma_2, -\sigma_2 + i\rho_2, i\tau_2, -2\rho_2 + 2i\sigma_2, 3\rho_2 + i\sigma_2) \end{cases}.$$

On a :

$$\overrightarrow{w_1} = (2i\sigma_1, -\sigma_1 + i\rho_1, i\tau_1, -2\rho_1 + 2i\sigma_1, 3\rho_1 + i\sigma_1)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -2 & 2i & 0 \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \sigma_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \text{ puis } L_1 \leftarrow -iL_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -2 & 2i & 0 \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \sigma_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & \boxed{2i} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 4i & 0 \\ 0 & -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \sigma_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & \boxed{2i} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \sigma_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang 3 avec deux équations auxiliaires compatibles et aucune inconnue auxiliaire. Il y a donc une unique solution $(\rho_1, \sigma_1, \tau_1) \in \mathbb{C}^3$. De même :

$$\overrightarrow{w_2} = (2i\sigma_2, -\sigma_2 + i\rho_2, i\tau_2, -2\rho_2 + 2i\sigma_2, 3\rho_2 + i\sigma_2)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -2 & 2i & 0 \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_2 \\ \sigma_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ 2i \\ -i \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_2 \text{ puis } L_2 \leftarrow -iL_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -2 & 2i & 0 \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_2 \\ \sigma_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \\ 2i \\ -i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & \boxed{2i} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 4i & 0 \\ 0 & -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_2 \\ \sigma_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \\ 2i \\ -i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & 0 \\ 0 & \boxed{2i} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_2 \\ \sigma_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang 3 avec deux équations auxiliaires compatibles et aucune inconnue auxiliaire. Il y a donc une unique solution $(\rho_2, \sigma_2, \tau_2) \in \mathbb{C}^3$.
Par conséquent, on a bien montré que $\overrightarrow{w_1} \in F$ et $\overrightarrow{w_2} \in F$. Or $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ (par définition du sous-espace vectoriel engendré) et toute combinaison linéaire de vecteurs de F appartient à F (car F est un sous-espace vectoriel). On en déduit que $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset F$.
Finalement, on a $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E$ et $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset F$ donc $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \subset E \cap F$.
$\underline{E \cap F \subset \text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})}$. Soit $\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in E \cap F$. Puisque $\overrightarrow{z} \in F$, il existe $(\rho, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^3$ tels que :

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = \overrightarrow{z} = (2i\sigma, -\sigma + i\rho, i\tau, -2\rho + 2i\sigma, 3\rho + i\sigma).$$

De plus, puisque $\overrightarrow{z} \in E$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= z_1 + iz_2 - 2z_3 + iz_4 + z_5 \\ &= (2i\sigma) + i(-\sigma + i\rho) - 2(i\tau) + i(-2\rho + 2i\sigma) + (3\rho + i\sigma) \\ &= (2-2i)\rho + (-2+2i)\sigma - 2i\tau. \end{aligned}$$

Montrons que $\overrightarrow{z} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$. On cherche donc à résoudre l'équation $\overrightarrow{z} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2}$ d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned} & \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{z} \\ \iff & \lambda_1(1,i,1,0,2) + \lambda_2(i,0,-1,2i,-i) = (z_1,z_2,z_3,z_4,z_5) = (2i\sigma, -\sigma+i\rho, i\tau, -2\rho+2i\sigma, 3\rho+i\sigma) \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ i & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2i \\ 2 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i\sigma \\ -\sigma+i\rho \\ i\tau \\ -2\rho+2i\sigma \\ 3\rho+i\sigma \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - iL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_1 \end{array} \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1-i \\ 0 & 2i \\ 0 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i\sigma \\ \sigma+i\rho \\ i\tau-2i\sigma \\ -2\rho+2i\sigma \\ 3\rho-3i\sigma \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + (1+i)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2iL_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 3iL_2 \end{array} \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & i \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i\sigma \\ \sigma+i\rho \\ i\tau - 2i\sigma + (1+i)(\sigma+i\rho) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i\sigma \\ \sigma+i\rho \\ (-1+i)\rho + (1-i\sigma) + i\tau \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang 2 avec trois équations auxiliaires et aucune inconnue auxiliaire. Les deux dernières équations auxiliaires sont compatibles. Pour l'équation auxiliaire L_3, on remarque que :

$$(-1+i)\rho + (1-i\sigma) + i\tau = \frac{1}{-2}\Big[\underbrace{(2-2i)\rho + (-2+2i)\sigma - 2i\tau}_{=0}\Big] = 0 \quad \text{car } \overrightarrow{z} \in E \cap F.$$

Par conséquent, toutes les équations auxiliaires sont compatibles et il y a une unique solution $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$. On en déduit que $\overrightarrow{z} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ et ceci est vrai pour tout $\overrightarrow{z} \in E \cap F$. Ainsi, on a bien montré que $E \cap F \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$.

Conclusion. Par double implication, on en déduit que $E \cap F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ donc que la famille $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est génératrice de $E \cap F$. Puisque c'est aussi une famille libre, on a bien montré que $\boxed{(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \text{ est une base de } E \cap F}$.

Problème

Ce problème propose d'étudier une mutation dynamique de l'information génétique au sein d'une lignée de cellules. Pour simplifier les notations, on désigne par A, B, C et D les quatre parties du génome touchées par la mutation. On observe les résultats suivants :

- *la mutation ne touche qu'une seule partie du génome de chaque cellule à chaque génération ;*
- *si la mutation touche A alors elle touche équiprobablement A, B, C ou D à la génération suivante ;*
- *si la mutation touche B alors elle touche équiprobablement A ou D à la génération suivante ;*
- *si la mutation touche C alors elle touche équiprobablement B ou C à la génération suivante ;*
- *si la mutation touche D alors elle continue de toucher D à la génération suivante.*

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute lettre $X \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$, on note X_n l'événement : «la mutation touche X à la n-ième génération» et x_n sa probabilité. Enfin, on suppose que la mutation touche A à la première génération, c'est-à-dire $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = d_1 = 0$.

1. *Déterminer a_2, b_2, c_2 et d_2.*

▶ Puisque la mutation touche A à la première génération, elle touche équiprobablement A, B, C ou D à la deuxième génération. On en déduit que :

$$a_2 = b_2 = c_2 = d_2.$$

Or A_2, B_2, C_2 et D_2 forment un système complet d'événements car la mutation ne touche qu'une seule partie des quatre parties A, B, C et D à la deuxième génération. On en déduit que :

$$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1.$$

Par conséquent :

$$\boxed{a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = \frac{1}{4}}.$$

2. *Calculer la probabilité que la mutation touche A à la 2^e^ génération sachant qu'elle touche D à la 3^e^.*

▶ On cherche la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{D_3}(A_2)$. Puisque A_2, B_2, C_2 et D_2 forment un système complet d'événements, on a d'après la formule de Bayes :

N'oubliez pas de préciser le système complet d'événements que vous utilisez pour appliquer la formule de Bayes.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{D_3}(A_2) &= \frac{\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}_{A_2}(D_3)}{\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}_{A_2}(D_3) + \mathrm{P}(B_2)\mathrm{P}_{B_2}(D_3) + \mathrm{P}(C_2)\mathrm{P}_{C_2}(D_3) + \mathrm{P}(D_2)\mathrm{P}_{D_2}(D_3)} \\
&= \frac{a_2\mathrm{P}_{A_2}(D_3)}{a_2\mathrm{P}_{A_2}(D_3) + b_2\mathrm{P}_{B_2}(D_3) + c_2\mathrm{P}_{C_2}(D_3) + d_2\mathrm{P}_{D_2}(D_3)} \\
&= \frac{\frac{1}{4}\mathrm{P}_{A_2}(D_3)}{\frac{1}{4}\mathrm{P}_{A_2}(D_3) + \frac{1}{4}\mathrm{P}_{B_2}(D_3) + \frac{1}{4}\mathrm{P}_{C_2}(D_3) + \frac{1}{4}\mathrm{P}_{D_2}(D_3)} \quad \text{d'après les résultats de la question précédente} \\
&= \frac{\mathrm{P}_{A_2}(D_3)}{\mathrm{P}_{A_2}(D_3) + \mathrm{P}_{B_2}(D_3) + \mathrm{P}_{C_2}(D_3) + \mathrm{P}_{D_2}(D_3)}.
\end{aligned}$$

Or on a d'après l'énoncé :

$$\mathrm{P}_{A_2}(D_3) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}_{B_2}(D_3) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}_{C_2}(D_3) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_{D_2}(D_3) = 1.$$

D'où :

$$\mathrm{P}_{D_3}(A_2) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0 + 1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \boxed{\frac{1}{7}}.$$

3. *Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 1$.*

(a) *Que peut-on dire de la somme $a_n + b_n + c_n + d_n$? Justifier.*

▶ Puisque $\boxed{A_n,\ B_n,\ C_n \text{ et } D_n \text{ forment un système complet d'événements}}$ car la mutation ne touche qu'une seule partie des quatre parties A, B, C et D à la n-ième génération. On en déduit que :

$$\boxed{a_n + b_n + c_n + d_n = 1}.$$

(b) *Montrer que $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$. Obtenir des expressions similaires pour b_{n+1}, c_{n+1} et d_{n+1}.*

▶ Puisque A_n, B_n, C_n et D_n forment un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

N'oubliez pas de préciser le système complet d'événements que vous utilisez pour appliquer la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \mathrm{P}(A_{n+1})\\ &= \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathrm{P}(C_n)\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathrm{P}(D_n)\mathrm{P}_{D_n}(A_{n+1})\\ &= a_n\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1}) + b_n\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1}) + c_n\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1}) + d_n\mathrm{P}_{D_n}(A_{n+1}).\end{aligned}$$

Or on a d'après l'énoncé :

$$\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_{D_n}(A_{n+1}) = 0.$$

D'où :

$$a_{n+1} = a_n\frac{1}{4} + b_n\frac{1}{2} + c_n0 + d_n0 = \boxed{\frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n}.$$

En raisonnant de même, on obtient :

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= \mathrm{P}(B_{n+1})\\ &= \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathrm{P}(C_n)\mathrm{P}_{C_n}(B_{n+1}) + \mathrm{P}(D_n)\mathrm{P}_{D_n}(B_{n+1})\\ &= a_n\frac{1}{4} + b_n0 + c_n\frac{1}{2} + d_n0\\ &= \boxed{\frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}c_n},\\ c_{n+1} &= \mathrm{P}(C_{n+1})\\ &= \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(C_{n+1}) + \mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}_{B_n}(C_{n+1}) + \mathrm{P}(C_n)\mathrm{P}_{C_n}(C_{n+1}) + \mathrm{P}(D_n)\mathrm{P}_{D_n}(C_{n+1})\\ &= a_n\frac{1}{4} + b_n0 + c_n\frac{1}{2} + d_n0\\ &= \boxed{\frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}c_n}\\ \text{et} \quad d_{n+1} &= \mathrm{P}(D_{n+1})\\ &= \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(D_{n+1}) + \mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}_{B_n}(D_{n+1}) + \mathrm{P}(C_n)\mathrm{P}_{C_n}(D_{n+1}) + \mathrm{P}(D_n)\mathrm{P}_{D_n}(D_{n+1})\\ &= a_n\frac{1}{4} + b_n\frac{1}{2} + c_n0 + d_n1\\ &= \boxed{\frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + d_n}.\end{aligned}$$

(c) En déduire que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ *où* L *est une matrice à exprimer en fonction de* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

▶ D'après les résultats de la question précédente, on a :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a_n & +\frac{1}{2}b_n & \\ \frac{1}{4}a_n & & +\frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{4}a_n & & +\frac{1}{2}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

D'où le résultat en posant $\boxed{L = \frac{1}{4}M}$.

4. Montrer que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *pour tout entier* $n \geqslant 1$.

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. Si $n = 1$ alors :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L^{1-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{L^0}_{=\mathrm{I}_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le résultat est vrai pour $n = 1$.

Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. On a :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}$$

$$\text{et} \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = L \times L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L^{(n+1)-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si le résultat est vrai au rang n alors il est vrai au rang $n + 1$ et cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

5. (a) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

▶ Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Résolvons le système $PX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} PX = Y \iff & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \end{matrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 + 2y_2 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient une matrice équivalente échelonnée de rang maximal donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

$$PX = Y \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = y_2 \\ 3x_2 + 4x_3 = y_1 + 2y_2 \\ -3x_3 = y_3 - y_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -(y_2 - x_2 - 2x_3) = -y_2 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2 - 4x_3) = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{4}{3}x_3 \\ x_3 = \frac{1}{-3}(y_3 - y_2) = \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -y_2 + x_2 + 2(\frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3) = -\frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 + x_2 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{4}{3}(\frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3) = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{9}y_2 + \frac{4}{9}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 + (\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{9}y_2 + \frac{4}{9}y_3) = \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{9}y_2 - \frac{2}{9}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{9}y_2 + \frac{4}{9}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la matrice inverse de P est :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}}.$$

(b) *Montrer que $P^{-1}MP = D + N$ où D est une matrice diagonale et N est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

▶ On a :

$$P^{-1}MP = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où le résultat en posant $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

(c) *Calculer DN, ND et N^2.*

▶ On a d'après les résultats de la question précédente :

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_3},$$

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_3}$$

$$\text{et} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_3}.$$

(d) En déduire que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

► On raisonne par récurrence.

Initialisation. Soit $n = 2$. On a d'après le résultat de la question 5(b) :

$$(P^{-1}MP)^2 = (D+N)^2.$$

Or :

$$(P^{-1}MP)^2 = P^{-1}M\underbrace{PP^{-1}}_{=\mathrm{I}_3}MP = P^{-1}M^2P$$

et :

$$\begin{aligned}(D+N)^2 &= (D+N)(D+N)\\ &= D^2 + \underbrace{DN}_{=0_3} + \underbrace{ND}_{=0_3} + \underbrace{N^2}_{=0_3}\\ &= D^2 \quad \text{d'après les résultats de la question précédente.}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$M^2 = \underbrace{PP^{-1}}_{=\mathrm{I}_3}M^2\underbrace{P^{-1}P}_{=\mathrm{I}_3} = P(P^{-1}M^2P)P^{-1} = P(P^{-1}MP)^2P^{-1} = P(D+N)^2P^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Donc le résultat est vrai pour $n = 2$.

Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour un entier $n \geqslant 2$ fixé. On a :

$$\begin{aligned}M^{n+1} &= M^nM = (PD^nP^{-1})M \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= PD^nP^{-1}M\underbrace{PP^{-1}}_{=\mathrm{I}_3} = PD^n(P^{-1}MP)P^{-1}\\ &= PD^n(D+N)P^{-1} \quad \text{d'après le résultat de la question 5(b)}\\ &= P(D^{n+1} + D^nN)P^{-1} = P(D^{n+1} + D^{n-1}\underbrace{DN}_{=0_3})P^{-1} \quad \text{car } n-1 \geqslant 1\\ &= PD^{n+1}P^{-1} \text{d'après les résultats de la question précédente.}\end{aligned}$$

La justification $n-1 \geqslant 1$ est nécessaire car D^{n-1} n'est pas définie si $n-1 < 0$.

Ainsi, si le résultat est vrai au rang n alors il est vrai au rang $n+1$ et cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2\; M^n = PD^nP^{-1}}.$$

On peut aussi utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2,\ M^n &= P(D+N)^nP^{-1} \quad \textit{par récurrence}\\ &= P\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^kD^{n-k}\right)P^{-1} \quad \textit{car } ND = DN\\ &= P\left(D^n + nND^{n-1}\right)P^{-1} \quad \textit{car } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_3\\ &= P\left(D^n + n\underbrace{ND}_{=0_3}D^{n-2}\right)P^{-1} \quad \textit{car } n-2 \geqslant 0\\ &= PD^nP^{-1}.\end{aligned}$$

6. *On fixe un entier $n \geqslant 3$ dans cette question. À l'aide des résultats précédents, montrer que*

$$L^{n-1} = \frac{4}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

puis en déduire des expressions de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de l'entier $n \geqslant 3$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
L^{n-1} &= \left(\frac{1}{4}M\right)^{n-1} \quad \text{d'après le résultat de la question 3(c)} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} M^{n-1} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} PD^{n-1}P^{-1} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente car } n-1 \geqslant 2 \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{d'après les résultats précédents} \\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{4}{3 \times 9}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\frac{4}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}}.
\end{aligned}$$

On en déduit d'après le résultat de la question 4 que :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = L^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{a_n = b_n = c_n = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

De plus, on a d'après le résultat de la question 3(a) :

$$d_n = 1 - a_n - b_n - c_n = \boxed{1 - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

7. *En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de la probabilité que la mutation touche A à la n-ième génération sachant qu'elle touche D à la $(n+1)$-ième génération.*

▶ On cherche la limite de $\mathrm{P}_{D_{n+1}}(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Soit $n \geqslant 3$. Puisque A_n, B_n, C_n et

D_n forment un système complet d'événements, on a d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{D_{n+1}}(A_n) &= \frac{\mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(D_{n+1})}{\mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(D_{n+1}) + \mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}_{B_n}(D_{n+1}) + \mathrm{P}(C_n)\mathrm{P}_{C_n}(D_{n+1}) + \mathrm{P}(D_n)\mathrm{P}_{D_n}(D_{n+1})} \\
&= \frac{a_n\frac{1}{4}}{a_n\frac{1}{4} + b_n\frac{1}{2} + c_n 0 + d_n 1} \quad \text{d'après l'énoncé} \\
&= \frac{a_n}{a_n + 2b_n + 4d_n} \\
&= \frac{\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4\left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)} \quad \text{d'après les résultats de la question précédente} \\
&= \frac{\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(3 + 4\left(\frac{9}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^n - 3\right)\right)} \\
&= \frac{1}{9\left(\frac{4}{3}\right)^n - 9}.
\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$ car $\frac{4}{3} > 1$. D'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}_{D_{n+1}}(A_n) = 0}$.