Devoir surveillé 8 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1. On veut trouver une formule de la suite définie par $\begin{cases} C_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} & = & \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \end{cases}$ Pour cela, on aura besoin de la fonction f définie par : $\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \end{array}$.

On note D_f le domaine de définition de f.

1. Calculer C_0, C_1, C_2, C_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
4. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite, son prolongement est également noté f.
5. Déterminer un développement limité en 0 de $\sqrt{1-4x}$ à l'ordre 4. En déduire un DL à l'ordre 3 de f en 0.
6. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = 1 + xf(x)^2$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $(D_0, D_1, \cdots, D_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que $f(x) =_0 \sum_{k=0}^{n+1} D_k x^k + o(x^{n+1})$. Montrer que $D_0 = 1, D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} D_k D_{n-k}$.
8. Soit $\alpha > 0$. On pose $\binom{\alpha}{0} = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!}$. Montrer que
$$\forall n \geq 1, \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\binom{2(n-1)}{n-1}.$$
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler le développement limité en 0 de $t \mapsto (1+t)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre $n+2$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'on a $f(x) =_0 \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} x^k + o(x^{n+1})$.
11. En s'appuyant sur des questions précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Exercice 2. On considère un jeu de 52 cartes. On rappelle que toute carte est la donnée de deux éléments : une valeur (un élément de $\{As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R\}$) et un symbole (un élément de $\{P, Co, Ca, T\}$). Par exemple, (As, P) désigne l'as de pique. On suppose que l'on dispose d'un jeu mélangé posé face cachée. On tire une à une toutes les cartes du jeu. On note X le rang du quatrième as tiré. Par exemple, si à l'issue du 20$^{\text{e}}$ tirage on tombe sur le 4$^{\text{e}}$ as on a alors $X = 20$.

On note Ω l'ensemble des 52-listes sans répétitions de l'ensemble des cartes possibles. On munit Ω de la probabilité uniforme.

1. Rappeler le cardinal de l'ensemble Ω.
2. Déterminer $X(\Omega)$ (sans justification).
3. Pour tout $i \in X(\Omega)$, on pose $A_i = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = i\}$. Déterminer le cardinal de A_4 et de A_{52}.
4. Déterminer le cardinal de A_i pour tout $i \in X(\Omega)$.
5. En déduire que pour tout $i \in X(\Omega), P(X = i) = \frac{\binom{i-1}{3}}{\binom{52}{4}}$.
6. Déduire des questions précédentes que $\sum_{i=0}^{52}\binom{i-1}{3} = \binom{52}{4}$.
7. On veut calculer $E(X)$.
   (a) On fixe $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. On pourra effectuer une récurrence sur n en fixant p au préalable.
   (b) En déduire $E(X)$.

Exercice 3. Déterminer les développements limités de :

1. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ en 0 à l'ordre 3 2. $g(x) = \ln(\cos(x))$ en 0 à l'ordre 3 3. $h(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)^3}$ en 0 à l'ordre 2.

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$. On appelle série génératrice de X la fonction

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = E(t^X).$$

1. Calculer $\phi_X(1)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$. Montrer que ϕ_X et ϕ_Y sont égales si et seulement si X et Y ont la même loi.
3. Justifier que ϕ_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $E(X) = (\phi_X)'(1)$.
5. On suppose que X suite une loi binomiale de paramètres n, p avec $n \geq 1$ et $p \in]0, 1[$.
   (a) Calculer ϕ_X.
   (b) Déduire des questions précédentes $E(X)$.