# Devoir surveillé 8 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

---

— Durée : 3 heures.

— Documents et calculatrice non autorisés.

— Une importance est accordée à la précision, concision et à la clarté de la rédaction.

---

**Exercice 1.** On veut trouver une formule de la suite définie par $\begin{cases} C_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} & = & \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \end{cases}$ Pour cela, on aura besoin de la fonction $f$ définie par : $\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \end{array}$.

On note $D_f$ le domaine de définition de $f$.

1. Calculer $C_0, C_1, C_2, C_3$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$.
4. Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite, son prolongement est également noté $f$.
5. Déterminer un développement limité en 0 de $\sqrt{1-4x}$ à l'ordre 4. En déduire un DL à l'ordre 3 de $f$ en 0.
6. Montrer que pour tout $x \in D_f,\ f(x) = 1 + xf(x)^2$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $(D_0, D_1, \cdots, D_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que $f(x) =_0 \sum_{k=0}^{n+1} D_k x^k + o(x^{n+1})$. Montrer que $D_0 = 1, D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} D_k D_{n-k}$.
8. Soit $\alpha > 0$. On pose $\binom{\alpha}{0} = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}$. Montrer que
$$\forall n \geq 1, \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\binom{2(n-1)}{n-1}.$$
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler le développement limité en 0 de $t \mapsto (1+t)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre $n+2$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'on a $f(x) =_0 \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} x^k + o(x^{n+1})$.
11. En s'appuyant sur des questions précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

**Correction**

1. Par définition : $C_0 = \underline{1}$. $C_1 = C_0^2 = 1, C_2 = C_0C_1 + C_1C_0 = \underline{2}$ et $C_3 = C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 2+1+2 = \underline{5}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$P(n) : \forall k \in \{0, \cdots, n\}, C_k \in \mathbb{N}.$$
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a $C_0 = 1 \in \mathbb{N}$. Donc $P(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. D'après $P(n)$, on sait que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, $C_k \in \mathbb{N}$. Or :
   $$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$
   Donc $C_{n+1}$ est somme de produit d'entiers positifs. Donc $C_{n+1} \in \mathbb{N}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C_n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x \in D_f$ si et seulement si $x \neq 0$ et $1-4x \geq 0$. Autrement dit, $f(x)$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $\frac{1}{4} \geq x$. On en déduit que

$$D_f = ]-\infty, 0[\cup]0, \frac{1}{4}].$$

4. On a : $\sqrt{1-4x} =_0 1 - 2x + o(x)$. Donc

$$1 - \sqrt{1-4x} =_0 2x + o(x)$$

Donc

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + o(1).$$

On en déduit que $\lim_0 f = 1$. Donc $f$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

5. On a $\sqrt{1+u} =_0 1 + \frac{1}{2}u - \frac{u^2}{2^3} + \frac{u^3}{2^3} - \frac{5u^4}{2^7} + o(u^4)$. Donc :

$$\sqrt{1-4x} =_0 1 - 2x - 2x^2 - 4x^3 - 10x^4 + o(x^4).$$

D'où :

$$1 - \sqrt{1-4x} =_0 2x + 2x^2 + 4x^2 + 10x^4 + o(x^4).$$

Donc

$$\boxed{\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} =_0 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + o(x^3).}$$

6. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = 1 + xf(x)^2$. Soit $x \in D_f$.

$$\begin{array}{rcl} 1 + xf(x)^2 & = & 1 + x\frac{1-2\sqrt{1-4x}+(1-4x)}{4x^2} \\ & = & 1 + \frac{2-2\sqrt{1-4x}-4x}{4x} \\ & = & \frac{4x+2-2\sqrt{1-4x}-4x}{4x} \\ & = & \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\ & = & \boxed{f(x)} \end{array}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $(D_0, D_1, \cdots, D_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que $f(x) =_0 \sum_{k=0}^{n+1} D_k x^k + o(x^{n+1})$. En calculant $f(x)^2$, on obtient :

$$f(x)^2 = \sum_{k=0}^{n} E_k x^k + o(x^n).$$

avec pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}, E_k = \sum_{j=0}^{k} D_j D_{k-j}$ Donc $xf(x)^2 = \sum_{k=0}^{n} E_k x^{k+1} + o(x^{n+1})$. D'où :

$$1 + xf(x)^2 = 1 + \sum_{k=0}^{n} E_k x^{k+1} + o(x^{n+1}).$$

Or $f(x) = 1 + xf(x)^2$. Par unicité du développement limité en 0 et à l'ordre $n+1$, on en déduit que $D_0 = 1$ et $D_{n+1} = E_n$. Autrement dit, on en déduit que

$$\boxed{D_0 = 1, D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} D_k D_{n-k}}.$$

8. Soit $n \geq 1$ On a :

$$\begin{aligned}
\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{2}-k)}{n!} &&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\frac{1-2k}{2})}{n!} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(1-2k)}{2^n n!} &&= \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(1-2k)}{2^n n!} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(1-2k)}{2^n n!} &&= \frac{(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)}{2^n n!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)(2k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(2k)2^n n!} &&= \frac{(-1)^{n-1}(2(n-1))!}{\prod_{k=1}^{n-1}(2k)2^n n!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2(n-1))!}{2^{n-1}(n-1)!2^n n!} &&= \frac{(-1)^{n-1}(2(n-1))!}{2^{2n-1}n(n-1)!(n-1)!} \\
&= \boxed{\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\binom{2(n-1)}{(n-1)}}
\end{aligned}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} =_0 \sum_{k=0}^{n+2}\binom{\frac{1}{2}}{k}t^k + o(t^{n+2}).$$

Donc :

$$\boxed{(1+t)^{\frac{1}{2}} =_0 1 + \sum_{k=1}^{n+2}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k}\binom{2(k-1)}{(k-1)}t^k + o(t^{n+2}).}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$1-\sqrt{1-4x} =_0 1 - 1 - \sum_{k=1}^{n+2}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k}\binom{2(k-1)}{(k-1)}(-4x)^k + o(x^{n+2}).$$

D'où :

$$1-\sqrt{1-4x} =_0 \sum_{k=1}^{n+2}\frac{(-1)^{2k}4^k}{2^{2k-1}k}\binom{2(k-1)}{(k-1)}x^k + o(x^{n+2}).$$

Donc

$$1-\sqrt{1-4x} =_0 \sum_{k=1}^{n+2}\frac{2}{k}\binom{2(k-1)}{(k-1)}x^k + o(x^{n+2}).$$

D'où

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} =_0 \sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k}\binom{2(k-1)}{(k-1)}x^{k-1} + o(x^{n+1}).$$

En réindexant la somme :

$$\boxed{\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} =_0 \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}x^k + o(x^{n+1}).}$$

11. D'après la question 7 et par unicité du développement limité en 0, on sait que la suite de terme générale $D_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$D_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} D_k D_{n-k}.$$

La suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc la même relation de récurrence que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $C_0 = D_0 = 1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, D_n = C_n$. Autrement dit,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.}$$

**Exercice 2.** On considère un jeu de 52 cartes. On rappelle que toute carte est la donnée de deux éléments : une valeur (un élément de $\{As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R\}$) et un symbole (un élément de $\{P, Co, Ca, T\}$). Par exemple, $(As, P)$ désigne l'as de pique. On suppose que l'on dispose d'un jeu mélangé posé face cachée. On tire une à une toutes les cartes du jeu. On note $X$ le rang du quatrième as tiré. Par exemple, si à l'issue du 20$^{\text{e}}$ tirage on tombe sur le 4$^{\text{e}}$ as on a alors $X = 20$.

On note $\Omega$ l'ensemble des 52-listes sans répétitions de l'ensemble des cartes possibles. On munit $\Omega$ de la probabilité uniforme.

1. Rappeler le cardinal de l'ensemble $\Omega$.
2. Déterminer $X(\Omega)$ (sans justification).
3. Pour tout $i \in X(\Omega)$, on pose $A_i = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = i\}$. Déterminer le cardinal de $A_4$ et de $A_{52}$.
4. Déterminer le cardinal de $A_i$ pour tout $i \in X(\Omega)$.
5. En déduire que pour tout $i \in X(\Omega), P(X = i) = \frac{\binom{i-1}{3}}{\binom{52}{4}}$.
6. Déduire des questions précédentes que $\sum_{i=0}^{52} \binom{i-1}{3} = \binom{52}{4}$.
7. On veut calculer $E(X)$.
   (a) On fixe $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. On pourra effectuer une récurrence sur $n$ en fixant $p$ au préalable.
   (b) En déduire $E(X)$.

**Correction**

1. On a $\boxed{|\Omega| = 52!}$.
2. On a $\boxed{X(\Omega) = \{4, 5, \cdots, 52\}}$.
3. Par définition,

$$\begin{aligned} A_4 &= \{\omega \in \Omega | X(\omega) = 4\} \\ &= \{\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_{52} \in \Omega | (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in \{(As, x), x \in \{P, Ca, Co, T)\}^4\} \end{aligned}$$

   Les éléments de $A_4$ sont donc caractérisés par la propriété suivante : les quatre premiers forment une 4-liste sans répétitions d'as et les éléments suivants forment une 48-liste sans répétitions des autres cartes.
   Donc $\text{Card}(A_4) = 4!48!$.
   Pour $A_{52}$, on sait que le dernier élément est un as, ce qui fait 4 possibilités. Il reste ensuite à placer les 51 autres éléments dans les autres emplacements. Ainsi, $\text{Card}(A_{52} = 51!4$.
4. Soit $i \in X(\Omega)$. un élément $\omega \in \Omega$ est caractérisé par le fait que le quatrième as est en $i^{\text{e}}$ position. On sait donc que tous les éléments de $i + 1$ à 52 ne sont pas des as. Ainsi, $[\omega_{i+1}, \cdots, \omega_{52}]$ forme une $52 - i$ liste sans répétition des éléments qui ne sont pas des as. Puis on place un des 4 as en $i^{\text{e}}$ position, puis on place tous les autres éléments dans les autres emplacements. Ainsi : $\boxed{\text{Card}(A_i) = (i-1)! \cdot 4 \cdot \dfrac{48!}{(i-4)!}}$.

   Déterminer le cardinal de $A_i$ pour tout $i \in X(\Omega)$.
5. Soit $i \in X(\Omega)$. On a $A_i = (X = i)$. La probabilité sur $\Omega$ étant uniforme, on en déduit que

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \frac{\text{Card}(A_i)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{(i-1)! \cdot 4 \cdot 48!}{52!(i-4)!} \\ &= \frac{(i-1)!4!48!}{(i-1)!3!52!} \\ &= \frac{\binom{i-1}{3}}{\binom{52}{4}}. \end{aligned}$$

6. La famille $((X = i))_{4 \leq \leq 52}$ forme un système complet d'événements. Donc :

$$\sum_{i=4}^{52} P(X = i) = 1.$$

   D'où

$$\sum_{i=4}^{52} \frac{\binom{i-1}{3}}{\binom{52}{4}} = 1.$$

On en déduit alors que $\sum_{i=4}^{52} \binom{i-1}{3} = \binom{52}{4}$.
Pour $i < 4$, les coefficients correspondant étant nuls, il en résulte que

$$\sum_{i=4}^{52} \binom{i-1}{3} = \binom{52}{4}.$$

7. (a) On fixe $p \in \mathbb{N}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
   - Initialisation : pour $n = 0$, procédons par disjonction de cas.
     - Cas 1 : $p = 0$. On a alors $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{0+1}{0+1} = 1$.
     - Cas 2 : $p \neq 0$. On a alors $\binom{0}{p} = 0$, $\binom{1}{p+1} = 0$.

     On a bien $P(0)$ vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est alors vraie.
     On a :

     $$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}.$$

     D'après $P(n)$, on en déduit que

     $$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}.$$

     D'après la formule du triangle de Pascal, il en résulte que

     $$\binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1+1}{p+1}$$

     La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

     $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}}.$$

   (b) On a

   $$\begin{aligned} E(X) &= \textstyle\sum_{k=4}^{52} P(X=k)k \\ &= \textstyle\sum_{k=4}^{52} \frac{\binom{k-1}{3}k}{\binom{52}{4}} \\ &= \textstyle\sum_{k=4}^{52} \frac{\binom{k}{4}4}{\binom{52}{4}} \\ &= \frac{4}{\binom{52}{4}} \textstyle\sum_{k=4}^{52} \binom{k}{4} \end{aligned}$$

   En appliquant la formule précédente (les termes indexés par $k < 4$ étant nuls) on en déduit que

   $$E(X) = \frac{4\binom{53}{5}}{\binom{52}{4}} = \boxed{\frac{4 \cdot 53}{5}.}$$

**Exercice 3.** Déterminer les développements limités de :

1. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ en 0 à l'ordre 3 2. $g(x) = \ln(\cos(x))$ en 0 à l'ordre 3 3. $h(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)^3}$ en 0 à l'ordre 2.

**Correction**

1.

$$\begin{aligned} f(x) &=_0 \tfrac{(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6})-(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}))+o(x^3)}{(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6})+(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6})+o(x^3)} \\ &=_0 \tfrac{2x-\frac{2x^3}{6}+o(x^3)}{2+\frac{x^2}{3}+o(x^3)} \\ &=_0 \tfrac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1+\frac{x^2}{6}+o(x^3)} \\ &=_0 (x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3))(1 - \tfrac{x^2}{6} + o(x^3)) \\ &= \boxed{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} g(x) &=_0 \ln(1 - \tfrac{x^2}{2} + o(x^2)) \\ &=_0 \boxed{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} h(x) &=_0 \tfrac{1}{(1-x)(1+x)^3} \\ &=_0 (1 + x + x^2 + o(x^2))(1 + x)^{-3} \\ &=_0 (1 + x + x^2 + o(x^2)(1 - 3x + 6x^2 + o(x^2)) \\ &=_0 \boxed{1 - 2x + 4x^2 + o(x^2)}. \end{aligned}$$

**Exercice 4.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$. On appelle série génératrice de $X$ la fonction

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = E(t^X).$$

1. Calculer $\phi_X(1)$.
2. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$. Montrer que $\phi_X$ et $\phi_Y$ sont égales si et seulement si $X$ et $Y$ ont la même loi.
3. Justifier que $\phi_X$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $E(X) = (\phi_X)'(1)$.
5. On suppose que $X$ suite une loi binomiale de paramètres $n, p$ avec $n \geq 1$ et $p \in ]0, 1[$.
   (a) Calculer $\phi_X$.
   (b) Déduire des questions précédentes $E(X)$.

**Correction**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$. On appelle série génératrice de $X$ la fonction

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = E(t^X).$$

1. On a $\phi_X(1) = E(1^X) = E(1) = 1$.
2. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} \phi_X = \phi_Y &= \forall t \in \mathbb{R}, E(t^X) = E(t^Y) \\ &= \forall t \in \mathbb{R}, \textstyle\sum_{k=0}^n P(X = k)t^k = \sum_{k=0}^n P(Y = k)t^k \end{aligned}$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme sous la forme $\sum a_k X^k$, il en résulte question

$$\phi_X = \phi_Y \Leftrightarrow \forall k \in \{0, \cdots, n\}, P(X = k) = P(Y = k).$$

Autrement dit, $\phi_X = \phi_Y$ si et seulement si $X$ et $Y$ ont même loi.

3. $\phi_X$ étant une fonction polynomiale, elle est donc de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$
4. Calculons $(\phi_X)'$. On a :
$$\forall t \in \mathbb{R}, (\phi_X)'(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)kt^{k-1}.$$
On a donc $(\phi_X)'(1) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)k = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)k = E(X)$.
5. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. $\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k$.
D'où :
$$\phi_X(t) = (pt + (1-p))^n.$$
(b) Il nous suffit de calculer la dérivée de $\phi_X$. On a alors :
$$\forall t \in \mathbb{R}, (\phi_X)'(t) = np(pt + (1-p))^{n-1}.$$
Donc $(\phi_X)'(1) = np$. D'où $E(X) = np$, d'après la question 4.