DS 9 mathématiques

BCPST 1B 2017-2018

— Durée : 3 heures

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. E désigne un espace vectoriel réel sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On désigne par a un réel non nul et on considère l'endomorphisme f_a de E, défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

1. (a) Écrire la matrice A_a de f_a relativement à la base B et calculer A_a^2.
   (b) l'application f_a est-elle inversible ?
2. On pose $u_1 = ae_1 + e_2 - ae_3$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
   (b) Vérifier que la matrice de f_a relativement à la base $\mathcal{B}'$ est $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Dans la suite, on cherche à caractériser les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = f_a$.
3. On suppose qu'un tel endomorphisme g existe et on note M sa matrice dans $\mathcal{B}'$.
   (a) Expliquer pourquoi $M^2 = K$ puis montrer que $MK = KM$.
   (b) Déduire de ces deux relations que $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, x, y et z étant 3 réels tels que $xz = 1$.
4. Réciproquement, vérifier que tout endomorphisme g dont la matrice dans $\mathcal{B}'$ est du type ci-dessus est solution de $g \circ g = f_a$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)^n \sin(u)}{1+\cos(u)^2} du$.

1. En posant $x = \cos(u)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.
2. Calculer I_0, I_1.
3. Pour tout $p \geq 1$, on pose $R_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{p+\frac{k^2}{p}}$. Justifier que $(R_p)_{p\geq 1}$ est une suite convergente. Quelle est sa limite ?
4. (INFO) Écrire une fonction `R(p)` qui retourne la valeur de R_p.
5. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$.
6. (INFO) Écrire une fonction `I(n)` qui retourne la valeur de I_n. On suppose que la variable A contient la valeur π et la variable B contient la valeur $\ln(2)$.
7. Soit $n \geq 0$. À l'aide de la récurrence, déterminer une expression de I_{2n} et de I_{2n+1} sous forme de somme.

Exercice 3. Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

I Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $E(X)$ son espérance.

1. (INFO) Écrire une fonction `aleatoireUn(n)` qui retourne X. On rappelle que `randint(0,n)` renvoie un entier compris entre 0 et n inclus.
2. Montrer : $\forall k \in \{1, ..., 2n-1\}, P(X = k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$
3. Montrer : $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.
4. Le joueur paie un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros losqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1.

II Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes. Le joueur paie un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a-k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. (INFO) Écrire une fonction `AleaDeux(n)` qui simule la variable aléatoire G_2.
2. Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.
3. Vérifier : $P(G_2 = -n) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.
4. Montrer : $E(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - \left(7n^2 - 1\right)}{6(2n-1)}$.

III Comparaison des deux protocoles

1. On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = 2 + 3y + y^2, y(0) = 0. \tag{E}$$

On se place sur l'intervalle $I = [0, \frac{1}{2}]$.

1. (INFO) Écrire une fonction `Euler(n)` qui retourne les listes $[y_0, \cdots, y_n]$ et $[t_0, \cdots, t_n]$ permettant de construire une solution approchée de (E).
2. On cherche une primitive de la fonction f définie par
$$\forall x \in I, f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}.$$
   (a) Montrer que pour tout $x \in I, f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.
   (b) En déduire une primitive de f.
3. On veut résoudre l'équation (E).
   (a) Soit y une solution de cette équation différentielle. On suppose que $2+3y+y^2$ ne s'annule pas sur I. Montrer que
$$\forall s \in I, \frac{y'(s)}{y(s)+1} - \frac{y'(s)}{y(s)+2} = 1$$
   (b) Soit $t \in I$. Montrer que $\ln(y(t) + 1) - \ln(y(t) + 2) + \ln(2) = t$.
   (c) En déduire une expression de y.
   (d) Vérifier que la fonction trouvée est solution de (E).